



**Escola Politècnica Superior  
de Castelldefels**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

# **TRABAJO DE FIN DE CARRERA**

**TITULO DEL TFC: Navegación en el sistema solar empleando asteroides  
como referencia**

**TITULACION: Enginyeria Tècnica Aeronàutica, especialitat Aeronavegació**

**AUTOR: José Luis Chica Bermejo**

**DIRECTOR: Jordi Gutiérrez Cabello**

**FECHA: 29 de Junio de 2005**



**Título:** Navegación en el sistema solar empleando asteroides como referencia

**Autor:** José Luis Chica Bermejo

**Director:** Jordi Gutiérrez Cabello

**Fecha:** 29 de Junio de 2005

## **Resumen**

El objetivo principal de este trabajo, es dar los fundamentos que permitan desarrollar un sistema para la determinación óptica de la posición de una sonda espacial dentro del Sistema Solar, mediante la observación desde la propia sonda de asteroides, u otros cuerpos de órbita conocida.

Para conseguir ese objetivo, se ha realizado una búsqueda en la bibliografía incluida en el trabajo, con el propósito de encontrar, y resumir los conceptos necesarios para la elaboración del sistema mencionado. A partir de estos conceptos, se ha definido un método que nos permite realizar el cálculo de la posición de una forma fiable y justificada matemáticamente.

Una vez establecida la forma de determinar la posición de la sonda espacial, se han implementado dos programas que se encargan de realizar todas las operaciones necesarias. Con estos códigos, se ha realizado un ejemplo del cálculo en un caso concreto.

En conclusión, el trabajo demuestra que resulta factible el diseño de un sistema de posicionamiento como el estudiado. Este, podrá ser de gran utilidad para misiones de exploración planetaria de bajo coste, como las que se están realizando en la actualidad.

**Title:** Solar system navigation making use of asteroids as a reference

**Author:** José Luis Chica Bermejo

**Director:** Jordi Gutiérrez Cabello

**Date:** June, 29th 2005

## Overview

The main objective of this paper, is giving the fundamental issues related to a space probe system, for optical determination of its position within the Solar System, making use of known asteroids as a reference.

To achieve the main purpose of this paper, we made a bibliographic research to find and summarize the necessary concepts. From this point, we had to find out a reliable, and rigorous way, to do all the math needed to get the system done.

Once we had the right method of doing the calculations, we made two computer programs. These ones, will be able to make all the necessary steps, which would be tedious otherwise. The computer programs have been applied to an example case.

Finally, we conclude that it is possible to develop a positional determination system as the one studied. In fact, this kind of system may be a useful tool for the low cost missions, which are being launched nowadays.

# INDICE

INTRODUCCION.....	1
-------------------	---

CAPITULO 1. CONCEPTOS PREVIOS.....	3
------------------------------------	---

1.1. Distancias en el Sistema Solar.....	3
1.2. Los asteroides.....	6
1.3. Movimiento de los cuerpos del Sistema Solar.....	9
1.4. Elementos orbitales.....	10
1.5. Precesión de los equinocios.....	12
1.6. Nutación.....	13
1.7. Movimiento propio estelar.....	13
1.8. Epocas.....	14
1.9. Día Juliano.....	15
1.10. Paralaje.....	15
1.11. Aberración.....	16

CAPITULO 2. DETERMINACION DE UNA POSICION CELESTE.....	17
---	----

2.1. Sistemas empleados para indicar una posición celeste.....	17
2.2. Sistema bidimensional de ascensión recta y declinación.....	17
2.3. Sistema de coordenadas geocéntrico.....	20
2.4. Sistema de coordenadas heliocéntrico.....	22
2.5. Transformación de coordenadas.....	24

<b>CAPITULO 3. EL SENSOR CCD.....</b>	<b>27</b>
3.1. Fundamentos del funcionamiento de un sensor CCD.....	27
3.2. Características técnicas de un sensor CCD.....	31
3.3. Problemas en la captación de imágenes.....	32
3.3.1. Relación señal-ruido.....	33
3.4. Captura de la imagen.....	34
3.5. Tratamiento de la imagen captada.....	36
 <b>CAPITULO 4. ASTROMETRIA DESDE LA SONDA.....</b>	 <b>42</b>
4.1. Determinación de la posición de la sonda.....	42
4.2. Astrometría desde la sonda espacial.....	42
4.3. Ajuste de centroides.....	43
4.4. Obtención de las coordenadas celestes.....	46
4.4.1. Relación entre coordenadas $(x, y)$ , y $(\xi, \eta)$ .....	47
4.4.2. Conceptos de trigonometría esférica.....	49
4.4.3. Relación entre coordenadas $(\alpha, \delta)$ , $(\xi, \eta)$ , y $(\xi'', \eta'')$ .....	51
4.5. Método de las constantes de la placa.....	56
4.6. Elaboración de los cálculos.....	59
 <b>CAPITULO 5. CALCULO DE LA POSICION DE LA SONDA.....</b>	 <b>60</b>
5.1. Método de determinación de la posición 1.....	60
5.1.1. Problema en dos dimensiones.....	60
5.1.2. Problema en tres dimensiones.....	62
5.2. Método de determinación de la posición 2.....	67
5.2.1. Problema en dos dimensiones.....	67
5.2.2. Problema en tres dimensiones.....	70
5.3. Posición final de la sonda espacial.....	74
5.4. Elaboración de los cálculos.....	76

<b>CAPITULO 6. RESULTADOS DE LOS CALCULOS Y CONCLUSION.....</b>	<b>77</b>
6.1. Cálculo de las coordenadas ( $\alpha$ , $\delta$ ) de un asteroide.....	77
6.2. Cálculo de la posición de la sonda espacial.....	79
6.3. Conclusión.....	82
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>84</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>86</b>
<b>ANEXO A. ROTACIONES.....</b>	<b>88</b>
A.1. Rotación de un sistema de dos coordenadas.....	88
A.2. Rotación de coordenadas ecuatoriales a eclípticas.....	91
<b>ANEXO B. POSICION DE UN ASTEROIDE EN SU ORBITA.....</b>	<b>94</b>
B.1. Anomalía media.....	94
B.2. Anomalía excéntrica.....	95
B.3. Posición del asteroide.....	98
<b>ANEXO C. METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS.....</b>	<b>101</b>
C.1. Fundamentos del método de los mínimos cuadrados.....	101
C.2. Aplicación para determinar las constantes de la placa.....	102
<b>ANEXO D. PROGRAMA 1: CALCULO DE LA POSICION DEL ASTEROIDE VISTO DESDE LA SONDA.....</b>	<b>106</b>
D.1. Código del programa principal 1.....	106
D.2. Código de las subrutinas del programa 1.....	111
D.3. Ejecución del programa 1 en el capítulo 6.....	112
<b>ANEXO E. PROGRAMA 2: CALCULO DE LA POSICION DE LA SONDA ESPACIAL.....</b>	<b>117</b>
E.1. Código del programa principal 2.....	118
E.2. Código de las subrutinas y funciones del programa 2.....	127
E.3. Determinación de las líneas de visión tridimensionales.....	133

E.4.	Base de datos de asteroides utilizada por el programa 2.....	136
E.5.	Información adicional sobre los asteroides.....	138
E.6.	Posiciones geocéntricas calculadas de los asteroides.....	140
E.7.	Ejecución del programa 2 en el capítulo 6.....	142
E.8.	Ordenamiento de los asteroides por distancia.....	143
E.9.	Archivos con la posición de la sonda.....	145
E.10.	Figuras adicionales del caso del capítulo 6.....	147



# TABLAS Y FIGURAS

Tabla 1.1	Distancias desde el Sol a los planetas interiores.....	5
Tabla 1.2	Distancias desde el Sol a los planetas exteriores.....	6
Tabla 4.1	Equivalencias entre los lados y ángulos de los triángulos esféricos representados en las figuras 4.5 y 4.6.....	53
Tabla 6.1	Datos necesarios para el programa 1.....	78
Tabla 6.2	Posiciones geocéntricas de la sonda y de los 4 asteroides.....	80
Figura 1.1	Zona central del Sistema Solar.....	4
Figura 1.2	Representación de las distancias en el Sistema Solar interior.....	5
Figura 1.3	Representación de las distancias en el Sistema Solar exterior.....	6
Figura 1.4	Distribución de 6.200 asteroides conocidos.....	7
Figura 1.5	Posición de las distintas familias principales de asteroides...	8
Figura 1.6	Forma elíptica de la órbita de los asteroides del cinturón.....	9
Figura 1.7	Áreas barridas iguales a tiempos T iguales.....	10
Figura 1.8	Elementos orbitales.....	12
Figura 1.9	Movimiento del eje de rotación terrestre por precesión y nutación.....	13
Figura 1.10	Descomposición de la velocidad de la estrella en dos componentes.....	14
Figura 1.11	Paralaje anual.....	15
Figura 1.12	Representación del fenómeno de aberración.....	16
Figura 2.1	Esfera celeste imaginaria sobre un observador.....	18
Figura 2.2	Longitud y Latitud de un punto P sobre la superficie terrestre.....	18
Figura 2.3	Representación de la esfera y del ecuador celestes.....	19
Figura 2.4	Representación de los ángulos de ascensión recta y de declinación de un punto X sobre la esfera celeste.....	20
Figura 2.5	Sistema de referencia geocéntrico ecuatorial.....	21
Figura 2.6	Relación entre coordenadas rectangulares y polares.....	22
Figura 2.7	Sistema de referencia heliocéntrico eclíptico.....	23
Figura 2.8	Ángulo de inclinación $\alpha$ entre los planos ecuatorial y eclíptico. Ángulos de longitud $\lambda$ , y de latitud $\beta$ celestes de un punto X.....	25
Figura 3.1	Aspecto de un sensor CCD.....	27

Figura 3.2	Elementos que componen un sensor CCD.....	28
Figura 3.3	Secuencia de la transferencia de carga entre electrodos.....	30
Figura 3.4	Esquema de la configuración de los píxels, y de la transferencia de carga de cada uno de ellos.....	31
Figura 3.5	Aspecto y gráficas S/N de tres tomas CCD de un mismo campo.....	36
Figura 3.6	Imagen en bruto.....	41
Figura 3.7	Tomas para calibrar la imagen en bruto.....	41
Figura 3.8	Imagen calibrada.....	41
Figura 4.1	Determinación del centro luminoso de la imagen mediante el ajuste de dos curvas Gaussianas.....	44
Figura 4.2	Determinación del centro luminoso de la imagen mediante una media ponderada de las luminosidades de todos sus píxels.....	45
Figura 4.3	Coordenadas (x, y) sobre el sensor CCD, y coordenadas ( $\xi$ , $\eta$ ) sobre el plano tangente.....	47
Figura 4.4	Relación entre la posición de los objetos en la esfera celeste con su posición en el plano tangente y en el plano del sensor CCD.....	48
Figura 4.5	Definición de un triángulo esférico.....	49
Figura 4.6	Relación entre los puntos en la esfera celeste y su proyección sobre el plano tangente.....	51
Figura 5.1	Parámetros del problema en dos dimensiones.....	61
Figura 5.2	Representación tridimensional de las posiciones de la Tierra, el asteroide, y la sonda espacial, con su proyección sobre el plano XY.....	62
Figura 5.3	Vista del problema tridimensional sobre el plano XY.....	63
Figura 5.4	Proyección sobre el plano XY del problema tridimensional..	64
Figura 5.5	Problema tridimensional y su proyección sobre el plano XZ.....	65
Figura 5.6	Proyección sobre el plano XZ del problema tridimensional..	66
Figura 5.7	Esquema del problema en dos dimensiones.....	67
Figura 5.8	Dos representaciones del problema en tres dimensiones.....	71
Figura 5.9	Proyección sobre el plano XY del problema tridimensional..	72
Figura 5.10	Proyección sobre el plano XZ del problema tridimensional..	73
Figura 5.11	Proyección sobre el plano YZ del problema tridimensional..	73
Figura 5.12	Posición de la Tierra y la sonda respecto del Sol.....	75
Figura 6.1	Imagen del asteroide Pallas con estrellas de fondo.....	78
Figura 6.2	Coordenadas del asteroide calculadas por el programa 1.....	79
Figura 6.3	Archivo calculado por el programa 2 con la posición final de la sonda espacial.....	81
Figura 6.4	Posiciones de la sonda, la Tierra, el Sol, y los 4 asteroides empleados.....	81

## INTRODUCCION

La tendencia de los últimos años en las misiones de exploración del Sistema Solar, está siendo la de lanzar varias sondas espaciales de coste reducido, en lugar de lanzar una sola sonda más compleja y de mayor coste. Con ello se persigue una dispersión del riesgo de fallo de una astronave, y la obtención simultanea de objetivos científicos en diferentes áreas. Para llevar a cabo esta filosofía, es necesario diseñar sistemas fiables y económicos para cada función de la sonda; una de estas funciones es la del sistema de navegación planetaria, que estudiaremos en parte en este trabajo.

Los sistemas de navegación que han empleado las sondas espaciales desde sus comienzos, se han basado en su seguimiento desde la Tierra con la red de antenas de espacio profundo (DSN) de la NASA. Desde estas antenas, es posible determinar la distancia y la velocidad radial de la astronave, mediante la medición del tiempo que tarda en ir y volver un pulso de radio, y midiendo el desplazamiento doppler de una señal portadora coherente enviada desde la sonda. Sin embargo, el procedimiento de localización de la nave a partir de estos datos, conlleva la aplicación de algoritmos complejos, y la intervención de un numeroso equipo de personas, que hace que todo el proceso tenga un alto coste, tanto económico, como en tiempo de utilización de las antenas.

En un futuro próximo, se quiere mantener la operación simultanea de una flota de pequeñas sondas de exploración planetaria, y esto supondrá que las antenas de la DSN tendrán que ser capaces de soportar la transmisión y recepción de un elevado flujo de información, con las comunicaciones necesarias para el funcionamiento de las sondas, y el retorno de datos científicos. En esas condiciones, será indispensable que las astronaves sean lo más autónomas posible, para minimizar el tiempo de uso de las antenas. El sistema de navegación podrá diseñarse para ser suficientemente autónomo, si se apoya en la navegación óptica, que veremos en este TFC.

Cuando se empezó a definir este trabajo, se estuvo analizando el caso de la sonda espacial de la NASA, Deep Space 1, que experimentó con éxito un sistema de navegación óptica autónomo, entre 1998 y 2001. A raíz de ese análisis, se decidió acotar nuestro trabajo a la demostración de la viabilidad de un sistema óptico capaz de determinar la posición de la sonda dentro del Sistema Solar, a partir de la observación de asteroides, u otros objetos; este sistema conseguiría que la nave fuera mayormente autónoma respecto de las antenas terrestres. La decisión de centrarnos en ese aspecto, se debió a los límites que la EPSC recomienda para el trabajo, que no permitían extenderse más sobre otros aspectos del sistema completo de navegación planetario.

Sobre la idea de dar unos fundamentos lo más sólidos posible, para la demostración de la viabilidad de nuestro sistema de posicionamiento, se ha buscado información en la bibliografía incluida al final del trabajo, y se han desarrollado 6 capítulos con una línea argumental que nos conduce, en el

último capítulo, a la resolución de un caso concreto del cálculo de la posición de la sonda espacial.

El funcionamiento básico del sistema de posicionamiento, consistirá en captar la imagen de un asteroide de órbita conocida; en función de dónde se encuentre la sonda cuando adquiera esa imagen, el asteroide aparecerá en una u otra posición respecto de las estrellas de fondo captadas en la misma toma. A partir de esta posición relativa del asteroide, podremos deducir mediante unos razonamientos trigonométricos, cuál es la posición desde donde la sonda ha captado la imagen.

## **Estructura de los capítulos**

En el primer capítulo, se dan de forma breve una serie de conceptos que son necesarios para desarrollar el resto del trabajo, estos irán apareciendo posteriormente en diferentes capítulos.

En el segundo capítulo, se describen los diferentes sistemas de referencia que se han utilizado para indicar la posición de un cuerpo celeste, y cómo se pueden transformar las posiciones dadas, de uno a otro sistema.

El tercer capítulo se dedica exclusivamente al sensor CCD, ya que esta es la pieza fundamental del sistema, que le permitirá captar las imágenes a partir de las cuales se deducirá la posición de la sonda. Se dan sus principios de funcionamiento, y los tratamientos necesarios de las imágenes captadas.

En el capítulo 4, se desarrolla en detalle el denominado método de las constantes de la placa, mediante el cual podemos conseguir determinar con precisión cuáles son las coordenadas celestes del asteroide captado en la imagen del sensor CCD. Este es un paso importante, pues la posición determinada es la que nos indicará la posición de la sonda en el Sistema Solar.

Una vez explicado en el capítulo 3 cómo se capta la imagen, y en el capítulo 4, cómo se determina la posición del asteroide en ella; en el capítulo 5 se podrá dar la forma de calcular la posición de la sonda mediante dos métodos diferentes, uno basado en la captura de la imagen de un asteroide y de la Tierra, y otro basado en la captura de las imágenes de dos asteroides.

A partir de los procedimientos explicados en los capítulos 4 y 5, se desarrollan dos programas para realizar todas las operaciones necesarias, cuyos códigos se incluyen en los anexos. Estos programas se utilizan en el capítulo 6 para resolver un ejemplo de la aplicación de los métodos vistos, que nos permiten determinar la posición de la sonda, con la captura de imágenes.

Aún habiendo limitado el objetivo del trabajo a la demostración de la viabilidad del sistema de determinación de la posición de la sonda, éste se ha extendido más de lo previsto, por lo que se han incluido en los anexos todas aquellas partes que hemos considerado que no eran fundamentales para seguir la argumentación del cuerpo principal del trabajo.

## CAPITULO 1. CONCEPTOS PREVIOS

En este primer capítulo, se va a dar una breve visión de una serie de conceptos generales que se utilizarán a lo largo de este trabajo, éstos serán necesarios en los capítulos siguientes para desarrollar el método de determinación de la posición de una sonda espacial, cuyos fundamentos son el propósito de este TFC.

### 1.1. Distancias en el Sistema Solar

El primer concepto necesario será el de Sistema Solar, y especialmente será importante tener una idea del orden de magnitud de las distancias que se tienen de recorrer en una trayectoria entre los distintos planetas, así como las unidades empleadas para cuantificarlas.

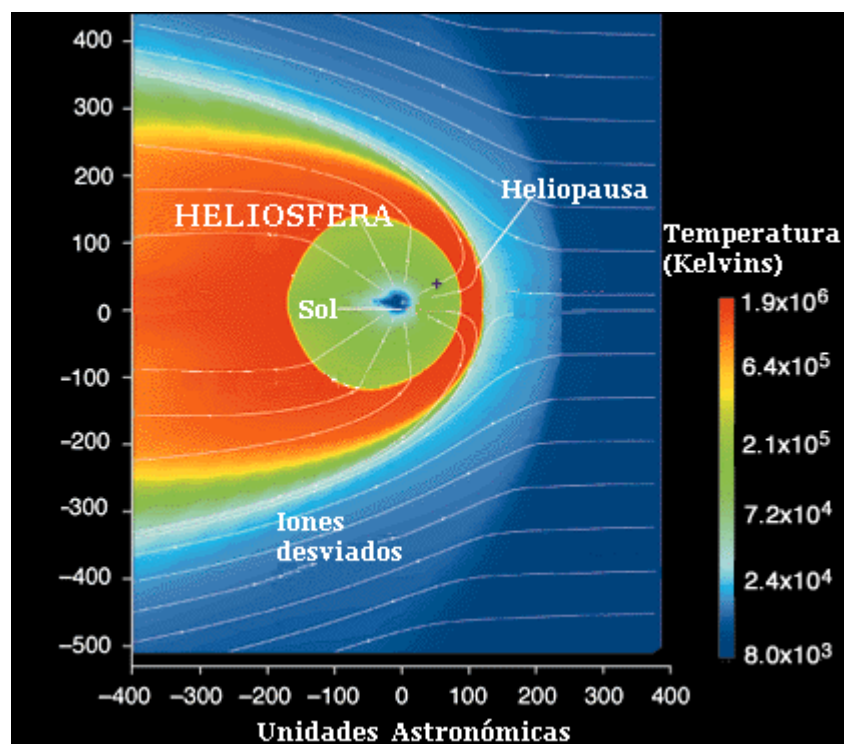
El Sistema Solar puede definirse como la zona del espacio, y todos los cuerpos contenidos en ella, bajo la influencia dominante del campo gravitatorio de la estrella Sol. Para medir las dimensiones de este espacio se usan fundamentalmente las unidades de distancia denominadas; Unidad Astronómica, y minutos, horas, o años luz, en función de la magnitud de la distancia que se quiera medir. Las distancias tratadas serán de un orden mucho mayor que las que usamos normalmente en la Tierra, por lo que el kilómetro sólo servirá como unidad de comparación para hacernos una idea de las grandes distancias del Sistema Solar.

Empezando por la unidad de distancia mayor, el año luz, ésta se correspondería con la distancia recorrida por un objeto moviéndose a la velocidad de la luz en el vacío durante el transcurso de un año, esto corresponde a  $9,461 \cdot 10^{12}$  km, o sea cerca de 10 billones de kilómetros. De forma análoga se definen las horas y minutos luz que son distancias algo más modestas, pero también muy grandes en términos terrestres, correspondiendo respectivamente a 1080 millones de kilómetros, y 18 millones de kilómetros. Entre las dos distancias anteriores se sitúa la Unidad Astronómica, que se define como la distancia del semieje mayor de la órbita terrestre alrededor del Sol, esta distancia de la Tierra al Sol se considera actualmente de  $1,49597870 \cdot 10^8$  km, aproximadamente 149,6 millones de kilómetros, y nos referiremos a ella como UA.

Tal como se ha definido el Sistema Solar en el segundo párrafo, este tendría un diámetro de aproximadamente dos años luz o 126.000 UA, es decir, algo menos de la mitad de la distancia a la estrella más próxima al Sol, Próxima Centauri. Sin embargo, la mayor parte de esta región del espacio “próxima” a nosotros es prácticamente desconocida, los objetos más lejanos conocidos del Sistema Solar son los cometas, que se cree pueden provenir de la nube de Oort a unas 10.000 UA; el resto de objetos naturales de los que se tiene constancia están a menos de 50 UA. Por tanto, el conocimiento actual de nuestro sistema planetario se limita a su zona central más cercana al Sol, y aún en esta, es todavía bastante limitado. Es en esta zona del espacio donde se

moverá la sonda espacial cuyo sistema de posicionamiento se fundamenta en este trabajo.

En la figura 1.1, se representan las 800x800 UA centrales del Sistema Solar tal como se piensa que son actualmente. En ella, se puede ver en la zona verde una cruz negra que indica la posición del objeto humano que más lejos ha conseguido llegar hasta el momento, la sonda Voyager 1, a 80 UA del Sol en enero de 2001, a gran distancia de los planetas más lejanos Neptuno y Plutón. En la figura también se representa la interacción entre el campo magnético generado por el Sol, y el de su entorno. Las temperaturas indicadas se corresponden a la de las partículas que hay en cada zona, (al ser su densidad muy baja no afectarían a la temperatura de un cuerpo masivo como el de una sonda interplanetaria).



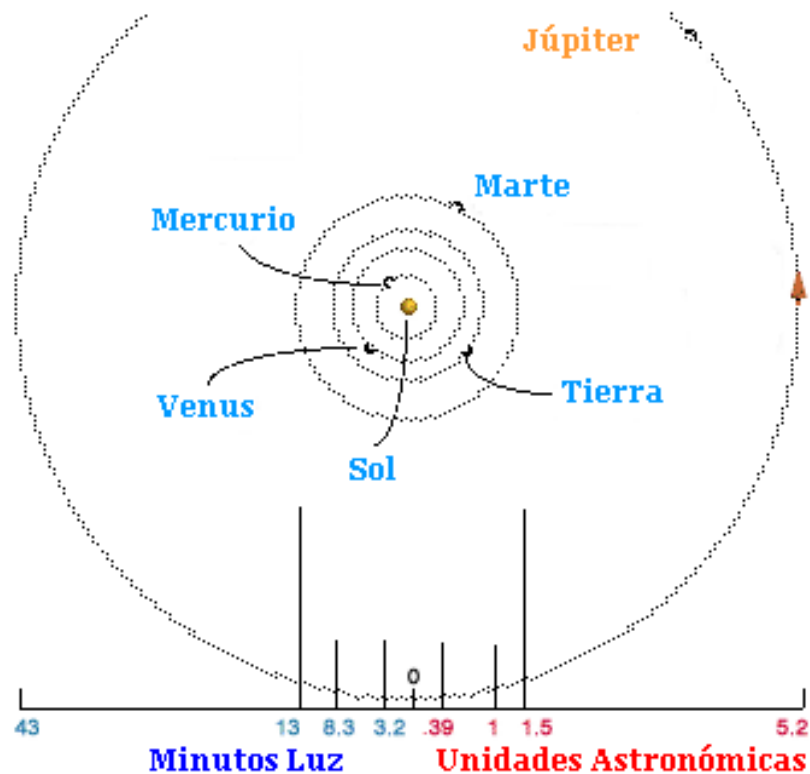
**Fig. 1.1** Zona central del Sistema Solar. En el centro de ésta, se movería la sonda espacial tratada en este trabajo

La zona central del Sistema Solar, donde se moverá la sonda espacial, contendrá al Sol, los planetas con sus satélites, y numerosos objetos menores, gran parte de los cuales serán los asteroides que vamos a usar como referencia para calcular la posición de la sonda planetaria. En las tablas 1.1 y 1.2 se indican las distancias medias desde el Sol a los planetas, cada una de estas distancias se da en Unidades Astronómicas, en millones de kilómetros, y en horas o minutos luz; estas dos últimas unidades de distancia serán útiles para estimar los tiempos necesarios para la comunicación por radio con la sonda. Hay dos tablas pues se hace la distinción entre dos zonas del Sistema Solar donde la magnitud de las distancias varía considerablemente, la primera

será el Sistema Solar interior, formado por los planetas Mercurio, Venus, Tierra y Marte, y la segunda zona será, el Sistema Solar exterior formado por Júpiter, Saturno, Urano, y Neptuno. La mayor concentración de asteroides estará en una extensa región comprendida entre estas dos zonas. En las figuras 1.2 y 1.3 se representan aproximadamente a escala las distancias dadas en las tablas, se puede apreciar que las distancias son mucho mayores en el Sistema Solar exterior, por lo que en éste se usa como unidad de distancia la hora luz, en lugar del minuto luz empleado para el Sistema Solar interior.

**Tabla 1.1** Distancias desde el Sol a los planetas interiores

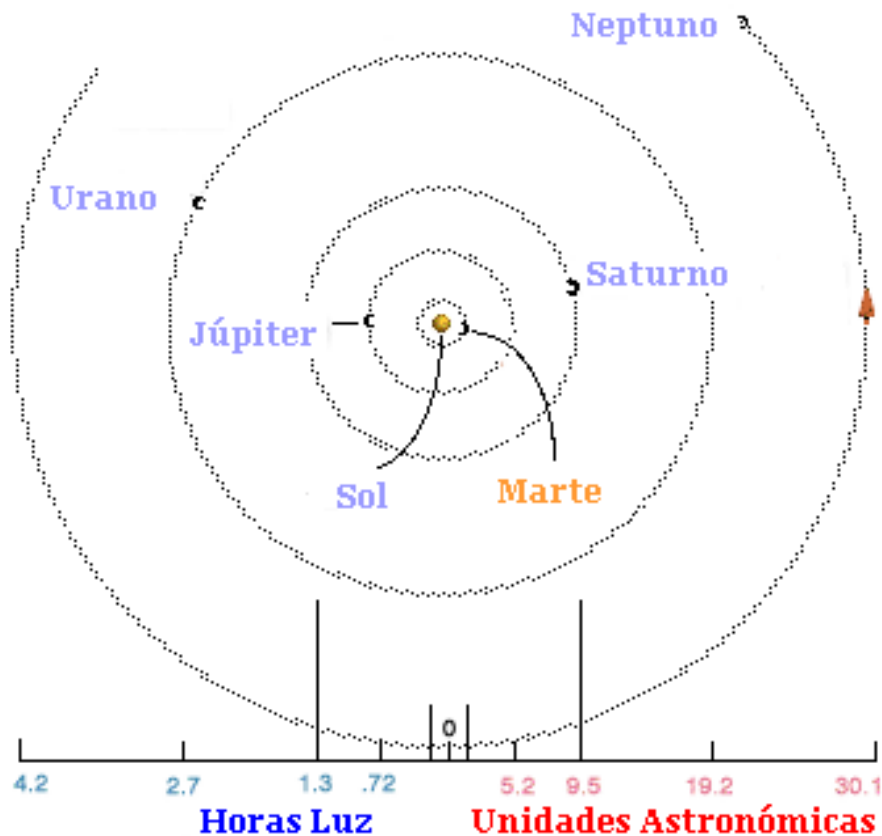
	UA	Minutos luz	$10^6$ km
<b>Mercurio</b>	0,387	3,2	57,9
<b>Venus</b>	0,723	6,0	108,2
<b>Tierra</b>	1	8,3	149,6
<b>Marte</b>	1,524	12,7	227,9



**Fig. 1.2** Representación de las distancias en el Sistema Solar interior, (Júpiter se incluye para mostrar la escala entre órbitas)

**Tabla 1.2** Distancias desde el Sol a los planetas exteriores

	UA	Horas luz	10 <sup>6</sup> km
<b>Júpiter</b>	5,203	0,72	778,3
<b>Saturno</b>	9,580	1,3	1425,7
<b>Urano</b>	19,200	2,7	2878
<b>Neptuno</b>	30,050	4,2	4509

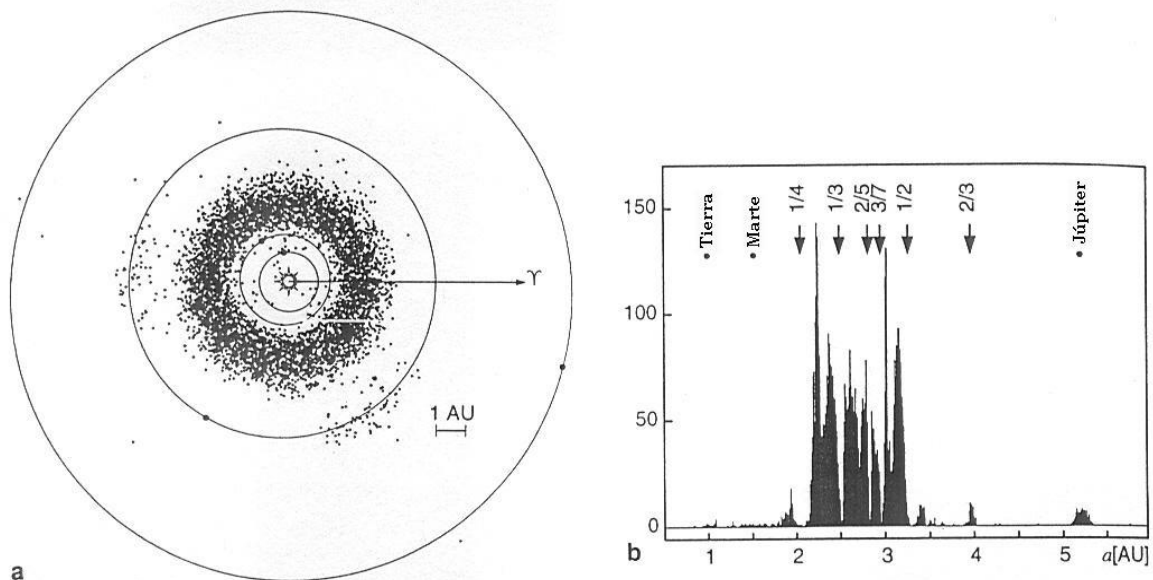
**Fig. 1.3** Representación de las distancias en el Sistema Solar exterior (Marte se incluye para mostrar la escala entre órbitas)

## 1.2. Los asteroides

Los asteroides, también conocidos como planetas menores, tienen un papel vital en el concepto de este trabajo, ya que vamos a usarlos como referencia para saber dónde se encuentra la sonda interplanetaria. Para ello, deberemos contar con una cantidad importante de asteroides cuya órbita esté bien determinada, y podamos por tanto conocer su posición exacta en un momento concreto. En este apartado, vamos a dar una idea general sobre que son los asteroides y dónde están dentro del esquema espacial del Sistema Solar visto en el apartado anterior.



El descubrimiento de los primeros asteroides se realizó a principios del siglo XIX, cuando se buscaba un planeta que según la llamada ley de Bode debía encontrarse entre las órbitas de Marte y Júpiter, y desde entonces, ya se han catalogado miles asteroides. La mayoría de ellos se encuentran a distancias entre 2.2 UA y 3.4 UA del Sol en el llamado cinturón principal de asteroides, el centro de esta zona de alta concentración de planetas menores está aproximadamente a 2.8 UA; la distribución de asteroides dentro de ella no es uniforme, existiendo zonas llamadas espacios vacíos de Kirkwood carentes de asteroides. Estas zonas están a distancias cuyo periodo orbital tiene una relación con el periodo orbital de Júpiter de  $1/3$ ,  $2/5$ ,  $3/7$ , ó  $1/2$ . Más allá del cinturón principal se encuentran dos agrupaciones de asteroides de menor densidad, son el llamado grupo Hilda a unas 4 UA y una relación  $2/3$  entre sus periodos orbitales y el de Júpiter, y el grupo de los Troyanos situados en la misma órbita de Júpiter a  $60^\circ$  delante y detrás de éste en los puntos de Lagrange L4 y L5 del sistema Sol-Júpiter. Hay también un grupo menor de asteroides llamados Apolo y Amor cuyas órbitas entran en el Sistema Solar interior, y cruzan respectivamente las órbitas de la Tierra y Marte, pudiendo llegar a suponer un riesgo remoto, aunque no nulo, de colisión con nuestro planeta. En la figura 1.4-a se representan junto con las órbitas de la Tierra, Marte, Júpiter, y Saturno, la posición de 6.200 de los asteroides conocidos. En la figura 1.4-b se representa una gráfica con la distribución de esos asteroides comentada en este párrafo, en el eje de abscisas están las distancias al Sol en UA, y en el de ordenadas el número de asteroides en cada distancia; se indican también las distancias de Marte, La Tierra, y Júpiter, y las distancias a las que se cumplen las relaciones entre los periodos orbitales de los asteroides y de Júpiter comentadas antes.

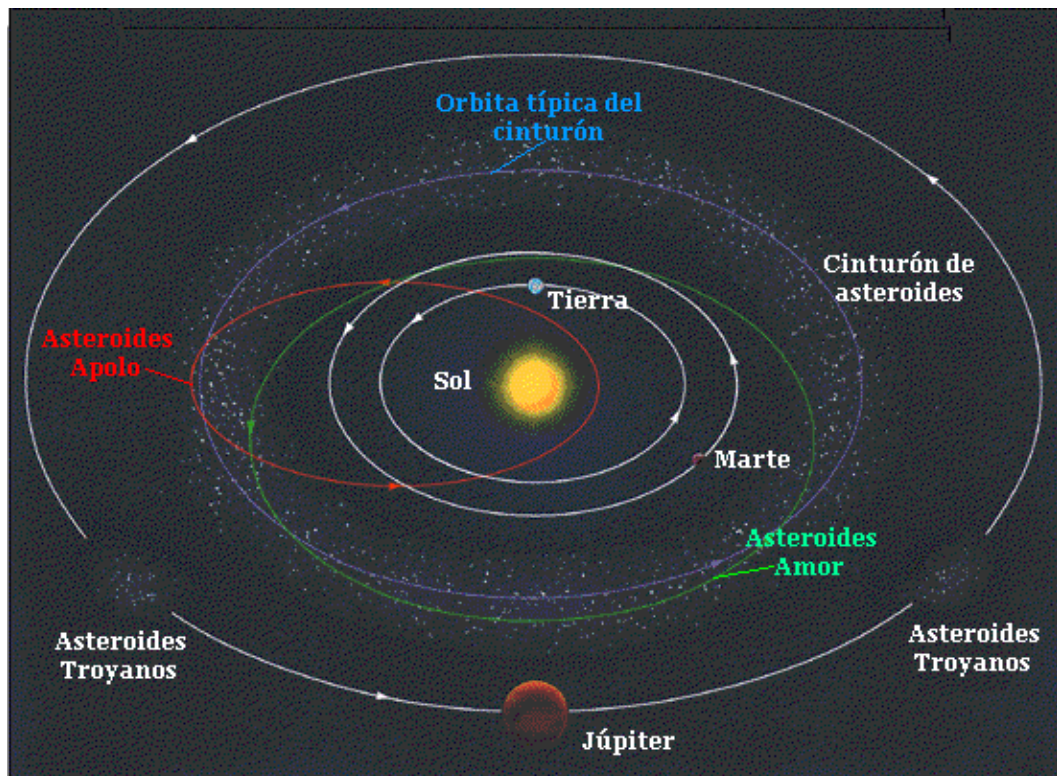


**Fig. 1.4** Distribución de 6.200 asteroides conocidos

Hay otros objetos celestes más allá de la órbita de Júpiter, en el Sistema Solar exterior, que no está del todo claro si deben ser catalogados como asteroides o como cometas. Los que están situados entre Saturno y Urano se conocen como Centauros, y los que están más allá de Neptuno son los llamados objetos Trans-neptunianos. Actualmente se están descubriendo objetos todavía más lejanos que de momento se denominan Plutoides y que empiezan a entrar en el lejano reino de los cometas.

El tamaño de los planetas menores o asteroides vistos hasta aquí, va de los aproximadamente 1000 km de diámetro del mayor de ellos Ceres, en el cinturón principal, a los menos de 30 km de diámetro de 433 Eros de la familia Apolo-Amor; aunque se estima que debe haber una gran cantidad de cuerpos más pequeños, y aún desconocidos, que podrían servir igualmente para la determinación de la posición de la sonda.

Los asteroides que tendrán en nuestro caso mayor valor como referencias para la sonda planetaria serán los del cinturón principal, debido a su mayor concentración y tamaño, aunque podrán utilizarse otras familias de asteroides en función de por donde tenga que pasar la sonda en su viaje interplanetario, si en el futuro se ve que el número de asteroides de tipo Centauro o Trans-neptuniano no es suficiente como para que sea realizable la determinación de la posición de la sonda con ellos, se tendrían que buscar sistemas complementarios para la navegación. En la figura 1.5 se representa la posición de los principales asteroides mencionados en este apartado.



**Fig. 1.5** Posición de las distintas familias principales de asteroides

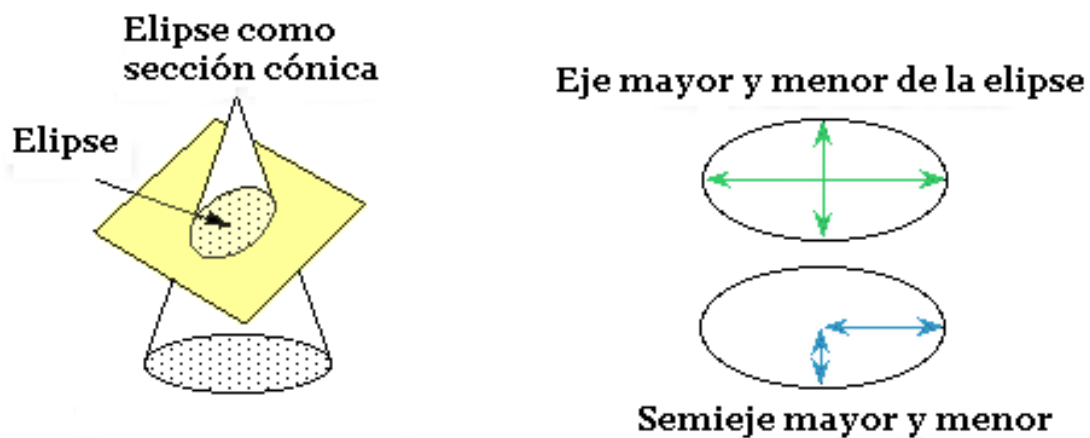
### 1.3. Movimiento de los cuerpos del Sistema Solar

El movimiento de todos los cuerpos que componen el Sistema Solar, está gobernado principalmente por el campo gravitatorio del Sol, ya que la masa de todos estos cuerpos juntos es muy pequeña comparada con la masa solar. El Sol aporta el 99.85 % de la masa del Sistema Solar, todos los planetas aportan el 0.135 % de la masa, y el restante 0.015 % está formado por los satélites de los planetas, los asteroides, los cometas, meteoritos, y la materia del medio interplanetario. Por tanto, en una primera aproximación es posible estudiar el movimiento de cada cuerpo del sistema planetario en su órbita alrededor del Sol considerando sólo la interacción gravitatoria entre la estrella y el cuerpo, aunque para un estudio preciso será necesario tener en cuenta las interacciones con otros cuerpos del sistema.

Un objeto del Sistema Solar, inmerso en el campo de fuerzas central generado por el Sol, de magnitud inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al Sol, tendrá una órbita con la forma de una sección cónica con el Sol en uno de sus focos. Este objeto seguirá las tres leyes empíricas de Kepler que describen el movimiento de los cuerpos dentro del Sistema Solar. Estas se pueden enunciar con las expresiones 1.1, 1.2, y 1.3 que se incluyen a continuación, para el caso de las órbitas elípticas seguidas por los asteroides del cinturón principal que vamos a usar como referencia:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos \theta} \quad (1.1)$$

donde  $r$  es la distancia del asteroide al centro del Sol,  $a$  es el semieje mayor de la elipse,  $e$  es su excentricidad, y  $\theta$  es el ángulo en radianes desde el asteroide hasta el punto de la órbita más cercano al Sol, o perihelio.

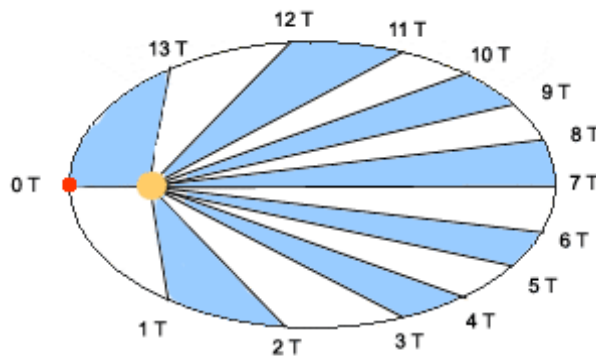


**Fig. 1.6** Forma elíptica de la órbita de los asteroides del cinturón

El radio vector que une el centro del Sol con la posición en cada momento del asteroide en su órbita, barre áreas iguales en tiempos iguales, y por tanto la velocidad del cuerpo en su órbita será mayor cuanto menor sea la distancia al Sol. Esto puede expresarse como:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = cte \quad (1.2)$$

donde A es el área barrida por el radio vector.



**Fig. 1.7** Áreas barridas iguales a tiempos T iguales

El cociente del cubo del semieje mayor **a** de una órbita dada, entre el cuadrado del periodo **P** de esa órbita es constante para distintas órbitas, es decir el periodo de la órbita será proporcional a la distancia del Sol:

$$\frac{a^3}{P^2} = 1 \quad (1.3)$$

donde **a** está dado en UA, y **P** en años.

## 1.4. Elementos orbitales

Una vez vistas la forma y las leyes que obedecerán los movimientos de los asteroides en sus órbitas, ahora vamos a ver cómo definiremos la órbita y la posición dentro de ella de cada asteroide particular.

Primero, necesitamos introducir unas definiciones como la de plano de la eclíptica, que es el plano definido por la órbita terrestre, éste coincide

aproximadamente con los planos definidos por las órbitas de la mayor parte de los planetas mayores y menores, es decir, que casi todos ellos orbitan aproximadamente en el mismo plano del Sistema Solar. Otra definición que se utiliza es la de línea de los nodos, que es la recta que queda definida por la intersección del plano de la eclíptica con el plano orbital de un cuerpo celeste del Sistema Solar; los puntos sobre esta línea de los nodos donde el cuerpo traspasa el plano de la eclíptica de sur a norte y de norte a sur, se llaman respectivamente nodo ascendente y nodo descendente, (ver figura 1.8). Por último, el punto Aries es por definición un punto en el espacio que define una dirección de referencia para indicar otras direcciones o puntos del espacio. La dirección del punto Aries viene dada por la intersección del plano de la eclíptica con el plano del ecuador celeste.

Definidas las ideas del párrafo anterior, ahora vemos como a partir de cinco parámetros independientes llamados elementos orbitales, se puede definir el tamaño, la forma, y la orientación de una órbita respecto del plano de la eclíptica, mientras que un sexto elemento orbital concretará la posición del cuerpo dentro de la órbita definida con los cinco parámetros anteriores. Este conjunto de seis elementos orbitales puede contener distintos parámetros pero los más usuales, serán los dibujados en la figura 1.8, que son los siguientes:

1. Semieje mayor  $a$ .

Es el semieje que se definía para una sección cónica dada.

2. Excentricidad  $e$ .

Es la misma  $e$  que se define para una sección cónica. Con  $e$  y  $a$  queda definida la forma y el tamaño de la órbita.

3. Inclinación  $i$ .

Es el ángulo entre los vectores perpendiculares a los planos de la eclíptica y el definido por la órbita que estamos considerando.

4. Longitud del nodo ascendente  $\Omega$ .

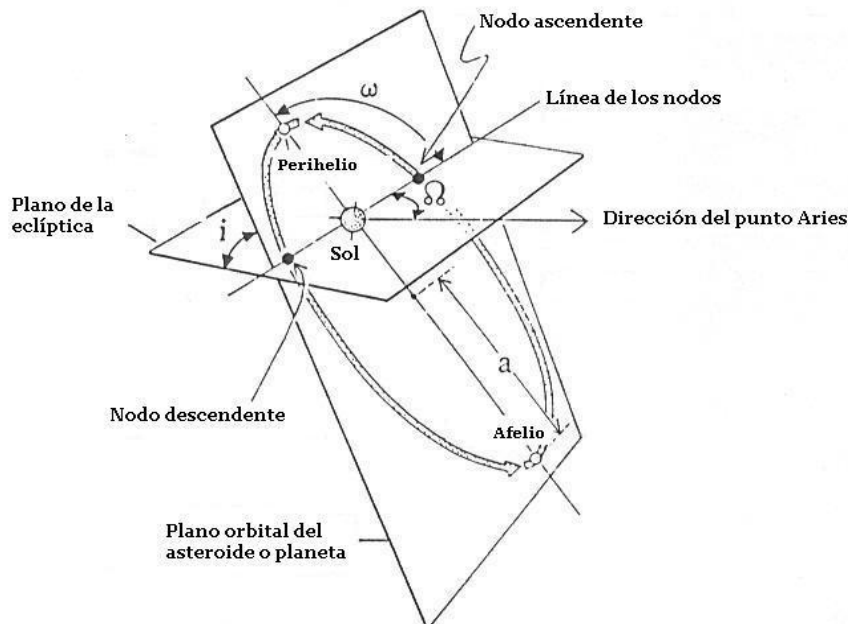
Es el ángulo definido entre la dirección del punto Aries y el nodo ascendente.

5. Argumento del Perihelio  $\omega$ .

Es el ángulo definido sobre el plano orbital, medido en el sentido de rotación del cuerpo, entre el nodo ascendente y la posición del perihelio de la órbita. Entonces,  $i$ ,  $\Omega$ , y  $\omega$  nos definen la orientación de la órbita respecto al plano de la eclíptica.

6. Anomalía verdadera  $v$ .

Es el ángulo definido sobre el plano orbital, entre la posición del perihelio, y la posición del cuerpo para un momento concreto. Este parámetro nos define entonces la posición del cuerpo en su órbita.



**Fig. 1.8** Elementos orbitales

## 1.5. Precesión de los equinocios

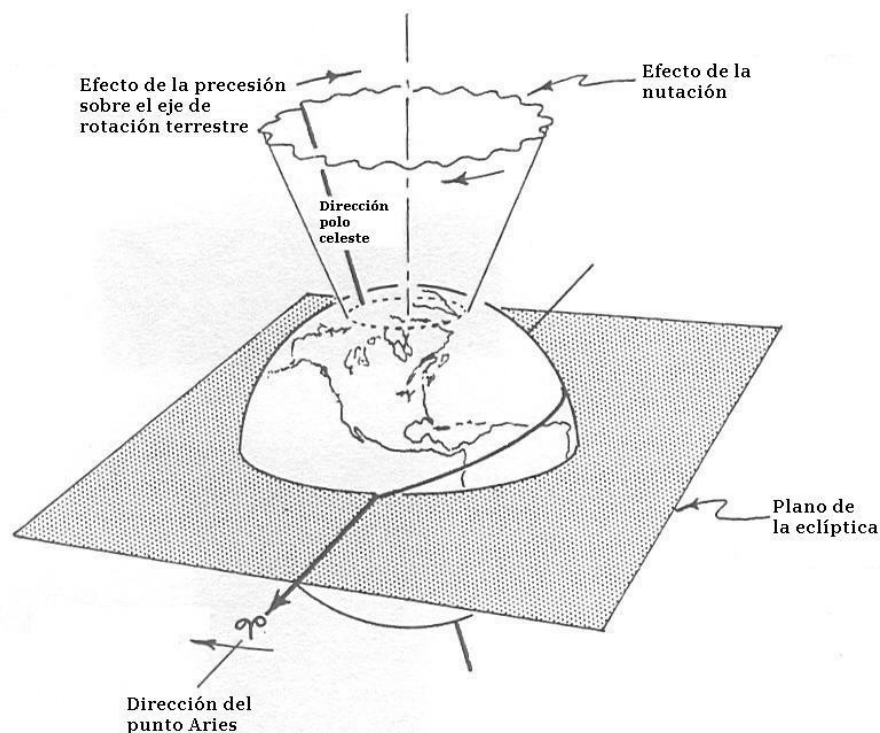
El llamado efecto de la precesión de los equinocios, es un factor muy importante a tener en cuenta para determinar con exactitud la posición de un objeto en el espacio, ya que hace que la dirección del punto Aries, que usamos como referencia para medir las posiciones de los objetos celestes, vaya variando con el tiempo.

La dirección hacia el punto Aries, también conocida como dirección del equinocio Vernal, queda determinada por la línea de intersección del plano de la eclíptica con el plano del ecuador celeste, sin embargo aunque el plano de la eclíptica podemos considerarlo fijo en una primera aproximación, el plano del ecuador celeste varía su posición a lo largo del tiempo, por lo que la dirección marcada por la línea de intersección de ambos planos también irá variando con el tiempo. El movimiento del plano ecuatorial celeste se debe a que la Tierra no es una esfera perfecta, y por tanto la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre ella no se produce de forma totalmente simétrica, provocando un momento de fuerzas o torque sobre el planeta; este altera el momento angular de rotación terrestre, y su eje de rotación tiende a moverse siguiendo una trayectoria en

forma de cono como la que se representa en la figura 1.9. Dicho movimiento de precesión tiene un periodo de unos 26.000 años, y hará que el eje terrestre que actualmente apunta hacia la estrella Polaris apunte dentro de unos 12.000 años aproximadamente hacia la estrella Vega. Lo que será más importante para nosotros en este trabajo es que el efecto de precesión provoca que actualmente la dirección del punto Aries se mueva unos 50 segundos de arco por año hacia el oeste, lo cual afectará a la determinación de las posiciones celestes que se explican en el siguiente capítulo.

## 1.6. Nutación

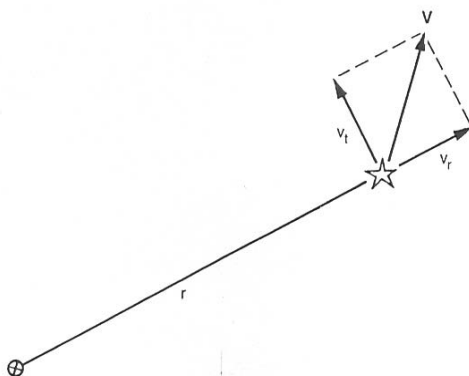
La nutación es un efecto que se superpone al de la precesión del eje de rotación terrestre, y que se produce por la interacción de la Tierra con el campo gravitatorio de la Luna, que provoca, como en el caso del Sol, un momento de fuerzas sobre la Tierra por su falta de esfericidad; sin embargo en este caso el plano orbital lunar también precesiona por perturbaciones de la gravedad solar debido a la inclinación de este plano respecto del plano de la eclíptica. La precesión lunar tiene un periodo de 18.6 años, y estas variaciones se reflejan en la influencia gravitatoria de la Luna sobre el eje de rotación terrestre provocando pequeñas oscilaciones de su posición de periodo 18.6 años, estas tienen aproximadamente la forma representada en la figura 1.9, aunque a una frecuencia mucho menor a la real.



**Fig. 1.9** Movimiento del eje de rotación terrestre por precesión y nutación

## 1.7. Movimiento propio estelar

Tanto el Sol como el resto de las estrellas llamadas fijas, están en realidad en movimiento alrededor del centro de gravedad de la Galaxia; esto provoca que la posición de cada estrella tal como la vemos desde la Tierra tienda a moverse respecto del resto de las estrellas, este movimiento se conoce como movimiento propio de la estrella, y es muy pequeño. Si descomponemos el vector de velocidad relativa de la estrella respecto a nosotros, en una componente radial en la dirección hacia la que vemos la estrella, y en una componente tangencial perpendicular a la anterior, tal como se representa en la figura 1.10, la componente tangencial de la velocidad es la que podremos apreciar como un movimiento en la esfera celeste, y por tanto será la causante del movimiento propio de la estrella tal como lo vemos nosotros. La estrella con el mayor movimiento propio conocida es Barnard que se mueve en el cielo 10.3 segundos de arco al año, es decir necesita algo menos de 200 años para recorrer una distancia como la del diámetro de la luna llena. Este es un movimiento propio muy grande comparado con la gran mayoría de las demás estrellas, como se podrá ver en la tabla 6.1 del capítulo 6. Para el caso que tratamos en este trabajo, el movimiento propio de las estrellas sólo nos influirá cuando calculemos la posición de los asteroides vistos desde la sonda espacial para lo que utilizaremos algunas estrellas como referencia, la posición de las cuales corregiremos por su movimiento propio.



**Fig. 1.10** Descomposición de la velocidad de la estrella en dos componentes

## 1.8. Epocas

Como se puede deducir de lo que hemos estado viendo en los apartados anteriores es muy importante determinar el momento en que queremos conocer la posición de un objeto celeste, ya que el entorno en que este se encuentra es dinámico y variará con el tiempo. Un concepto que se empleará será el de época que es un momento concreto en el tiempo, en ese instante de tiempo, los asteroides y planetas estarán en una posición dada, el punto Aries estará señalando hacia una dirección dada debido a la precesión y a la nutación, y las estrellas se verán en una posición dada debido a su movimiento propio; y todo eso variará para otro momento o época. Por ejemplo el catálogo con las posiciones de las estrellas que tendremos que usar, nos dará estas posiciones para una época, es decir respecto de la dirección del punto Aries para esa época, y con el catálogo de asteroides ocurre algo parecido, sus elementos orbitales son válidos para una época concreta, y estos podrán ir cambiando



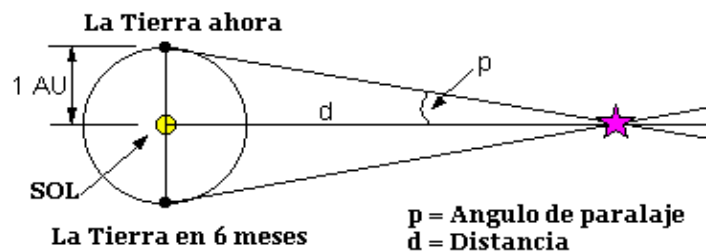
debido a perturbaciones de sus órbitas. Es decir, que la época será un concepto importante a tener en cuenta para realizar los distintos cálculos. Las épocas suelen darse con el número de año con decimales indicando las fracciones de año, por ejemplo 1950.5, o 2000.0.

## 1.9. Día Juliano

Las épocas del apartado anterior también podrán darse en días Julianos, estos tienen la misma duración de los días que usamos habitualmente, pero tienen su origen o día cero el 1 de enero del año 4713 a.C. al mediodía. Cualquier momento posterior se da con el número de días transcurridos desde ese momento, las horas se dan como una fracción de día. Esto se hace así por que a lo largo de la historia han habido algunos cambios de calendarios que no se han producido al mismo tiempo o de forma global en todas partes, por lo que al cambiar la forma de cuantificar las fechas habría conflictos para interpretar las observaciones astronómicas realizadas en distintos países y momentos de la historia. Para hacernos una idea del orden de magnitud de las fechas Julianas, el día 31 de Enero de 2005 a las 0:00 horas solares corresponde al día Juliano 2 453 401.5.

## 1.10. Paralaje

Este es un concepto fundamental, ya que nos permitirá averiguar la situación de la sonda a partir de su visión de asteroides de posición conocida. Se basa en el hecho de que si miramos un objeto desde diferentes posiciones, lo vemos en diferentes direcciones, y las diferencias angulares entre estas direcciones es lo que llamamos paralaje. La paralaje variará en función de la posición desde donde se observe el objeto, y de la distancia a la que se haga, por lo que en general podremos usarla para determinar posiciones y distancias. El efecto de paralaje se emplea por ejemplo, en el sistema estereoscópico de visión humano, en el cual observamos un mismo objeto desde dos posiciones distintas separadas una media de 7 cm, que es la separación entre nuestros dos ojos. También se emplea para determinar las distancias a estrellas “cercanas” observándolas desde dos posiciones a aproximadamente 2 UA ó 299.2 millones de kilómetros una de otra, que es la distancia que separa las posiciones de la Tierra tras 6 meses de recorrer su órbita solar; este caso es el denominado paralaje anual y se representa en la figura 1.11.



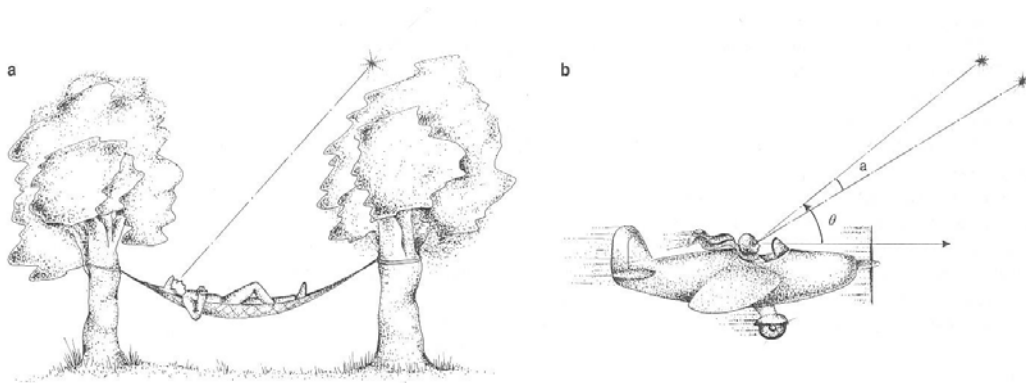
**Fig. 1.11** Paralaje anual

Para el caso de los cuerpos celestes cercanos como los asteroides, el cambio de dirección al observarlos desde dos puntos distintos, se aprecia por el desplazamiento aparente de su posición respecto de las estrellas mucho más lejanas detrás de él; esto se debe a que la distancia entre los dos puntos de observación es suficientemente grande, comparada con la distancia al asteroide, como para generar una diferencia angular apreciable entre las direcciones en las que vemos al asteroide, sin embargo, esa misma distancia entre los dos puntos es muy pequeña comparada con la distancia a las estrellas, y no será suficiente para apreciar algún cambio en las direcciones de observación de estas. Como consecuencia, las estrellas no cambiarán de posición vistas desde los diferentes puntos de la trayectoria de la sonda, pero sí lo harán los asteroides mucho más cercanos, y este hecho nos permitirá calcular la posición de la sonda dentro del sistema solar.

### 1.11. Aberración

El fenómeno llamado aberración ocurrirá al observar una estrella desde un cuerpo en movimiento, como una sonda espacial, o la Tierra, y será debido a la velocidad finita de la luz que proviene de la estrella. Aunque no lo haremos aquí, se puede demostrar que la composición de estos dos factores provocará que la dirección aparente en la que se observa la estrella, difiera un ángulo  $a$ , en la dirección del movimiento del observador, de la dirección real de la misma. El valor de este ángulo  $a$  será función de: la velocidad del observador  $v$ , de la velocidad de la luz  $c$ , y del ángulo  $\theta$  entre la dirección real de la estrella y el vector velocidad del observador, tal como indica la expresión 1.4. En la figura 1.12 se puede ver la idea del concepto de aberración, el observador en reposo observaría la dirección real hacia donde está la estrella, pero el observador en movimiento la verá desplazada un ángulo  $a$ .

$$a = \frac{v}{c} \sin \theta \quad (1.4)$$



**Fig. 1.12** Representación del fenómeno de aberración

## CAPITULO 2. DETERMINACION DE UNA POSICION CELESTE

Como este trabajo trata sobre un método para determinar la posición de una sonda espacial, a lo largo de él se tendrán que hacer referencias a la posición de distintos objetos celestes, y se hará usando varios sistemas de referencia según sea más conveniente en cada caso. En este capítulo se presentan los sistemas de coordenadas que hemos usado para indicar las posiciones de los cuerpos celestes.

### 2.1. Sistemas empleados para indicar una posición celeste

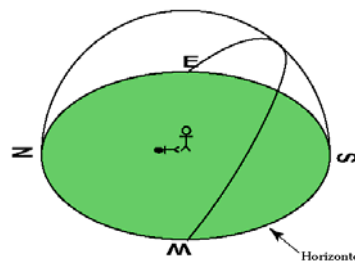
Cuando tengamos que dar la posición de un objeto celeste dentro del Sistema Solar podremos usar diferentes sistemas de referencia. En este trabajo, se usan posiciones referidas al centro de la Tierra o geocéntricas, y posiciones referidas al centro del Sol o heliocéntricas. En cada uno de esos dos casos, se emplean coordenadas rectangulares ( $x, y, z$ ), y coordenadas polares o esféricas ( $r, \varphi, \theta$ ). Respecto a las coordenadas polares, en función de que estas sean geocéntricas o heliocéntricas, emplearemos dos planos de referencia distintos, a partir de los cuales mediremos uno de los ángulos; para el caso geocéntrico, el plano de referencia será el que contiene al ecuador terrestre, y las tres coordenadas esféricas se llamarán, radio, ascensión recta, y declinación, que designaremos con  $(r, \alpha, \delta)$ , o  $(r, AR, DEC)$ . Para el caso heliocéntrico, el plano de referencia será el plano de la eclíptica, y las tres coordenadas se llamarán, radio, longitud celeste, y latitud celeste, que designaremos con  $(r, \lambda, \beta)$ . En los siguientes apartados se ven estos sistemas con más detalle.

Además de los sistemas de referencia anteriores, que nos darán una posición en el espacio tridimensional del Sistema Solar, también emplearemos un sistema de referencia bidimensional, en el cual una posición en la esfera celeste se dará con dos ángulos. Dichos ángulos serán los mismos nombrados antes de ascensión recta y declinación ( $\alpha, \delta$ ), pero esta vez no será necesario dar un valor  $r$  para la tercera dimensión. Este sistema de referencia en dos dimensiones se usará cuando estemos interesados en indicar sólo la dirección en la que se encuentra un objeto celeste, sin importar cual es su distancia.

### 2.2. Sistema bidimensional de ascensión recta y declinación

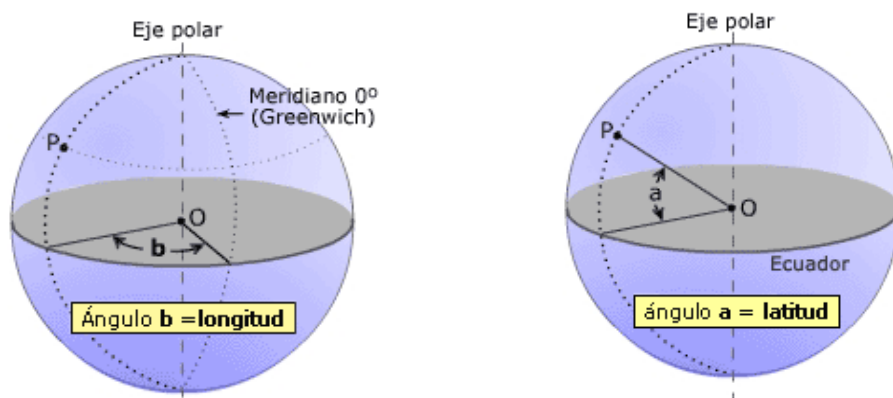
Si se mira al cielo en una noche clara desde una zona despejada de obstáculos, podremos observar multitud de objetos luminosos; la gran mayoría de ellos serán estrellas, pero también podremos ver algún planeta, algún satélite artificial, y si miramos con atención, alguna galaxia. Cada uno de estos objetos estará a distancias muy diferentes de nosotros, desde unos pocos cientos de kilómetros hasta muchos billones de kilómetros, sin embargo, a simple vista no seremos capaces de detectar la inmensidad de ese espacio, y

sólo podremos determinar en que dirección está cada uno de los objetos que observamos. Es como si todo lo que vemos estuviera sobre una superficie esférica sobre nosotros (figura 2.1), y como esto ocurrirá sobre cualquier punto de la superficie terrestre, será como si existiera una gran esfera con todos los objetos celestes sobre ella, y con la Tierra en su centro (figura 2.3). A esta esfera imaginaria la llamamos esfera celeste, y será un concepto muy útil para poder determinar en que dirección está cada objeto celeste, sin determinar a que distancia se encuentra. Esto mismo ocurrirá cuando observemos el cielo desde la sonda espacial, aunque ahora será ésta el centro de su esfera celeste; se debe resaltar que para la sonda habrá un cambio de perspectiva con respecto a la terrestre, lo que modificará las posiciones aparentes de objetos cercanos como los asteroides.



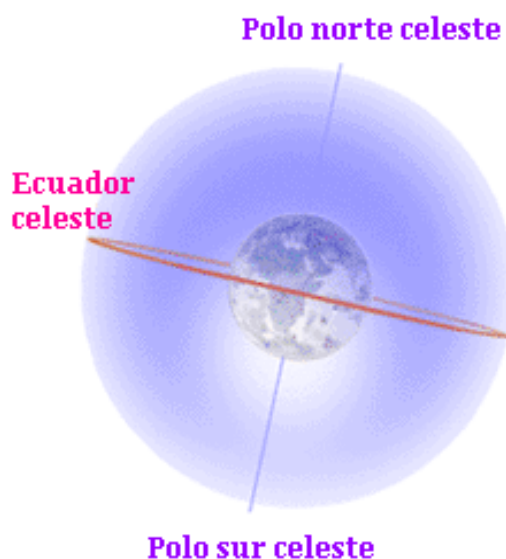
**Fig. 2.1** Esfera celeste imaginaria sobre un observador

Para indicar con precisión cuál es la posición de un cuerpo en la esfera celeste, el sistema de coordenadas que emplearemos es el de ascensión recta y declinación, (AR, DEC), o  $(\alpha, \delta)$ . Al dar estas dos coordenadas de un objeto celeste, su posición queda perfectamente determinada en el cielo, de forma análoga a como queda determinada una posición sobre la superficie terrestre al dar sus coordenadas de latitud y longitud terrestres. De hecho el sistema de coordenadas de latitud y longitud terrestre, representado en la figura 2.2, se establece de forma casi idéntica a cómo lo hace el sistema de coordenadas de ascensión recta y declinación celeste. En la figura 2.2 se muestra como con dos ángulos  $a$  y  $b$ , establecemos una forma de indicar con precisión el punto que nos interese sobre la superficie terrestre.



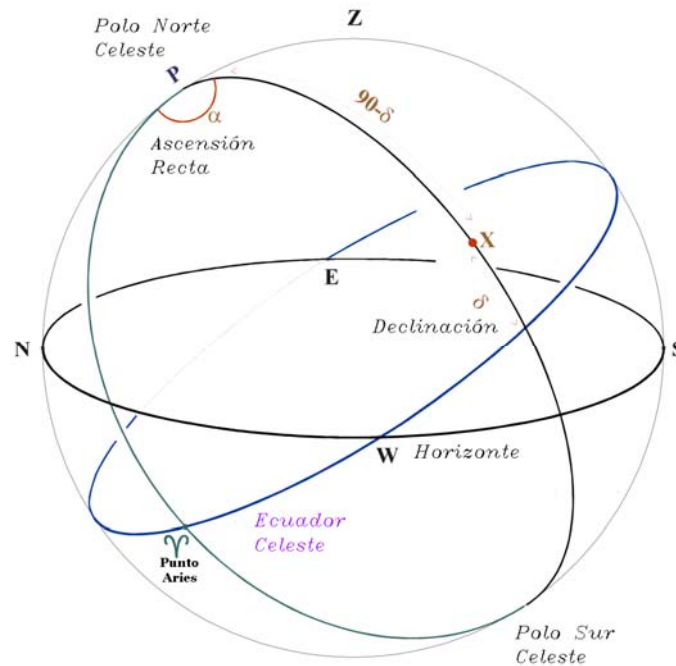
**Fig. 2.2** Longitud y Latitud de un punto P sobre la superficie terrestre

Una vez visto el fundamento del sistema de coordenadas de longitud y latitud terrestres, la definición del sistema de coordenadas celestes de ascensión recta y declinación es inmediata. Ahora, en lugar de especificar la posición de un punto sobre la superficie de la esfera terrestre, estaremos interesados en hacerlo sobre la esfera celeste. Para ello, primero proyectaremos el ecuador terrestre sobre la esfera celeste, y a esta proyección la llamaremos ecuador celeste (ver figuras 2.1 y 2.3). Sobre este ecuador podremos especificar el ángulo equivalente al de longitud terrestre, que ahora llamaremos ascensión recta, de forma que dando el valor de un ángulo de ascensión recta quedará especificado un punto sobre el ecuador celeste; si ahora, a partir de ese punto damos un segundo ángulo análogo al de latitud terrestre, podremos determinar, un segundo punto sobre la esfera celeste, este segundo ángulo será el de declinación. Por tanto, dando el valor de los ángulos de ascensión recta y declinación podremos determinar un punto de la esfera celeste de forma análoga a como lo hacíamos sobre la superficie terrestre con la longitud y la latitud.



**Fig. 2.3** Representación de la esfera y del ecuador celestes

Ahora, necesitaremos un origen a partir del cual medir el ángulo de ascensión recta. Para encontrar un punto que no se mueva sobre el ecuador de la esfera celeste, se toma el punto donde la trayectoria aparente del Sol sobre la esfera celeste a lo largo del año (eclíptica), cruza al ecuador celeste pasando del hemisferio sur celeste al norte, y éste será un punto casi fijo sobre el ecuador celeste. Este punto es el que ya se había comentado en el capítulo 1, donde se había dado una definición análoga a la dada aquí, y que llamamos punto Aries. Decimos casi fijo, porque como se vio, se mueve lentamente debido al efecto de la precesión del eje de rotación terrestre. En la figura 2.4 se representan los ángulos de declinación y ascensión recta, de un objeto celeste X, se marca el punto Aries con su símbolo del zodiaco correspondiente.



**Fig. 2.4** Representación de los ángulos de ascensión recta y de declinación de un punto X sobre la esfera celeste

Definido un origen sobre el ecuador celeste, el ángulo de ascensión recta se medirá a partir de él creciendo hacia el Este; se podría medir en grados, pero por convención se hace en horas, minutos y segundos, ya que un punto sobre la esfera celeste visto desde la superficie terrestre parece dar una vuelta en algo menos de 24 horas, entonces los  $360^\circ$  del ecuador celeste serán aproximadamente 24 horas, y por tanto cada hora de ascensión recta equivaldrá aproximadamente a  $15^\circ$  sobre el ecuador celeste. El ángulo de declinación adoptará valores entre  $-90^\circ$  y  $+90^\circ$ , de forma que el polo norte celeste estará a  $+90^\circ$ , el polo sur celeste a  $-90^\circ$ , y el ecuador celeste a  $0^\circ$  de declinación.

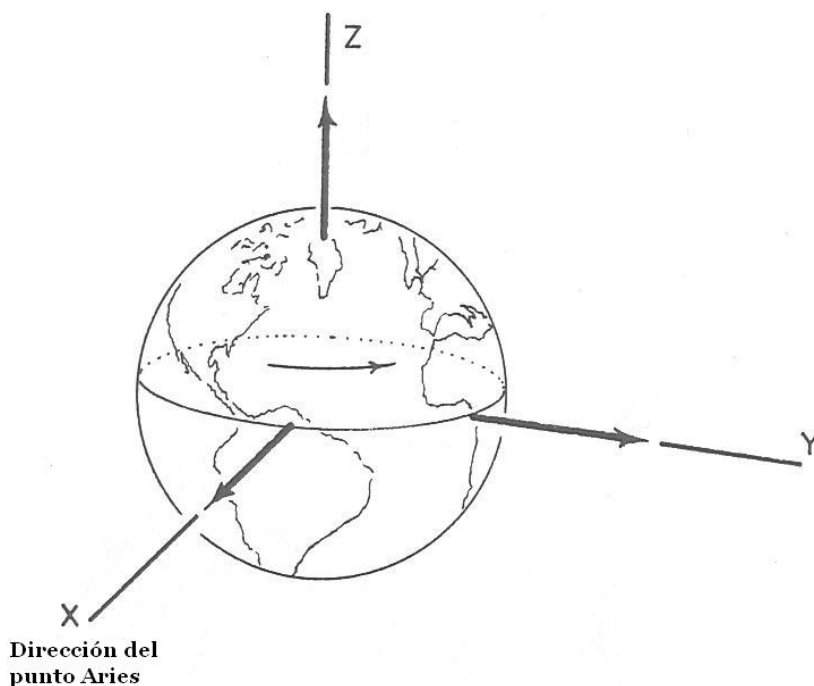
Hay que especificar que para la determinación de la posición de la sonda espacial que tratamos en este trabajo, habrá que distinguir entre la posición del asteroide que usemos de referencia dada tal como se vería desde la Tierra, y la posición de ese mismo asteroide tal como se vería desde la sonda espacial. En el primer caso nos referiremos a ascensión recta y declinación geocéntricas del asteroide, y en el segundo caso simplemente como ascensión recta y declinación del asteroide visto desde la sonda.

### 2.3. Sistema de coordenadas geocéntrico

En el apartado anterior hemos considerado la forma de dar la posición de un objeto sobre la esfera celeste, es decir, con lo visto hasta ahora podemos determinar con precisión la dirección hacia la que se encuentra un cuerpo celeste dado. Si a la dirección conocida con dos ángulos dados de ascensión recta y declinación, le añadimos ahora un tercer parámetro que cuantifique la distancia a la que se encuentra el objeto, su posición en el espacio de tres

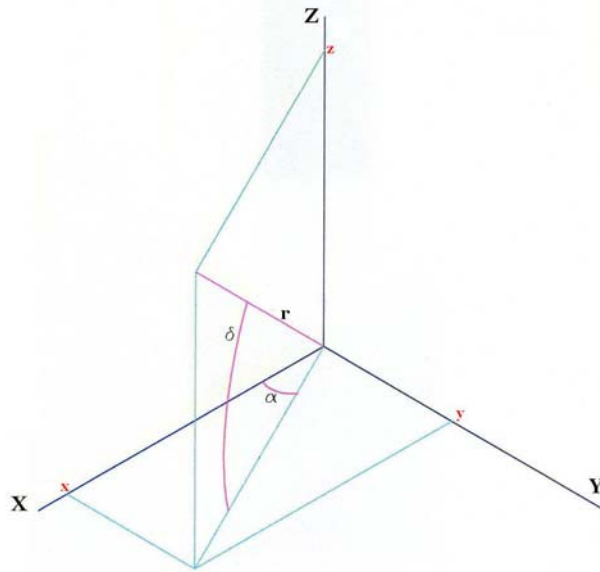
dimensiones quedará totalmente determinada. Con esta distancia al objeto, que llamaremos radio tendremos que la posición de cada cuerpo celeste quedará determinada con tres coordenadas: radio, ascensión recta, y declinación,  $(r, AR, DEC)$ , o  $(r, \alpha, \delta)$ .

La posición tridimensional determinada con  $(r, \alpha, \delta)$ , será respecto del centro de la Tierra, ya que la hemos definido a partir del sistema bidimensional anterior, y éste lo habíamos considerado como centrado en la Tierra, luego el sistema visto se llamará geocéntrico. Además el plano que habíamos utilizado como referencia para medir los ángulos de declinación había sido el plano del ecuador celeste, por lo que el sistema visto se llamará además ecuatorial. En conjunto el sistema de referencia de coordenadas  $(r, \alpha, \delta)$  se llamará geocéntrico ecuatorial, y es el representado en la figura 2.5. En dicha figura, se puede ver como el plano formado por los ejes X e Y, coincide con el plano ecuatorial, y el eje x apunta en la dirección del punto Aries.



**Fig. 2.5** Sistema de referencia geocéntrico ecuatorial

La misma posición en el espacio dada con el radio y los dos ángulos vistos  $(r, \alpha, \delta)$ , puede igualmente darse con las tres coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  de los ejes de coordenadas de la figura 2.5, en el primer caso nos referiremos a unas coordenadas geocéntricas ecuatoriales polares o esféricas, y en el segundo caso a unas coordenadas geocéntricas ecuatoriales rectangulares. La relación entre las coordenadas de una misma posición dada con  $(r, \alpha, \delta)$ , o con  $(x, y, z)$ , se puede obtener con las siguientes expresiones a partir de la figura 2.6.



**Fig. 2.6** Relación entre coordenadas rectangulares y polares

Si se conocen los valores de  $(r, \alpha, \delta)$  se puede deducir de la figura 2.6 que los valores de  $(x, y, z)$  serán los siguientes:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha) \\ y &= r \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha) \\ z &= r \cdot \sin(\delta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

y si se conocen los valores de  $(x, y, z)$ , también en la figura 2.6 se puede ver que los valores de  $(r, \alpha, \delta)$  serán:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \delta &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

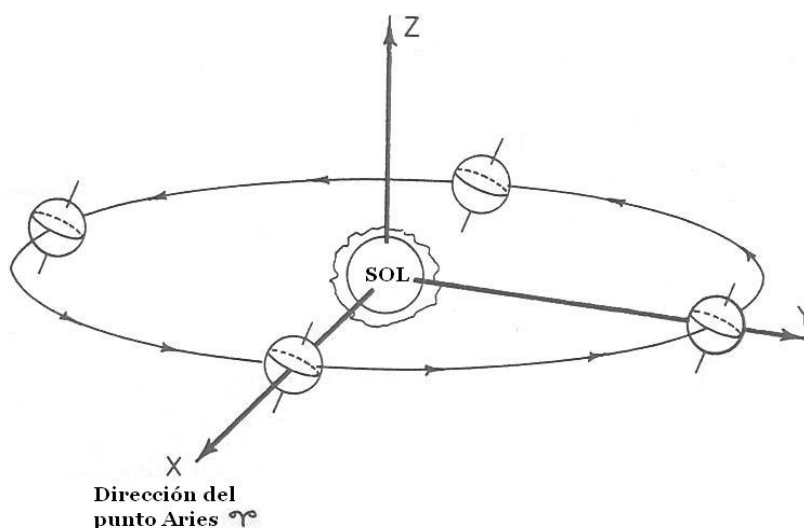
## 2.4. Sistema de coordenadas heliocéntrico

Además del sistema de coordenadas geocéntrico visto en el apartado anterior, también se usará el sistema de coordenadas heliocéntrico, en el cual las posiciones de un objeto dentro del Sistema Solar, no se dan respecto del



centro de la Tierra, sino respecto del centro del Sol. Las coordenadas heliocéntricas serán el sistema natural para expresar la posición de los cuerpos que se mueven dentro del campo gravitatorio solar, ya que consideraremos el Sol fijo en el centro del sistema, y todos los demás cuerpos tendrán en cada momento, una posición relativa respecto de él. Por tanto, estas coordenadas heliocéntricas resultarán las más apropiadas para dar la posición final calculada de nuestra sonda interplanetaria.

Además de la diferencia entre la posición tomada como origen de los ejes de coordenadas, entre el sistema geocéntrico y el heliocéntrico, en el segundo, en lugar de usar el plano del ecuador celeste como referencia, se empleará el plano de la eclíptica, que como se había dicho anteriormente es el plano definido por la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Por tanto, el sistema de referencia que usaremos para dar la posición final de la sonda espacial será el representado en la figura 2.7, y lo llamaremos sistema heliocéntrico eclíptico.



**Fig. 2.7** Sistema de referencia heliocéntrico eclíptico

En la figura 2.7 podemos ver como en este caso el plano xy coincide con el plano de la eclíptica, mientras que el eje x sigue señalando en la dirección definida por el punto Aries. Para dar las posiciones en tres dimensiones dentro de este sistema, usaremos un procedimiento similar al empleado para el sistema geocéntrico ecuatorial. Una posición podrá darse o bien por sus coordenadas rectangulares ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), usando los ejes de la figura 2.7, o bien por sus coordenadas polares dando dos ángulos y un radio. El ángulo equivalente al de ascensión recta visto antes, se llamará ahora de longitud celeste  $\lambda$ , y se medirá desde la dirección del punto Aries a lo largo del plano eclíptico entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , y el equivalente al ángulo de declinación se llamará latitud celeste  $\beta$ , y se medirá a partir del plano eclíptico entre  $+90^\circ$  y  $-90^\circ$ . En la figura 2.8 se pueden ver estos dos ángulos para un punto X situado sobre la bóveda celeste.

## 2.5. Transformación de coordenadas

Para realizar los cálculos de la posición de la sonda en los capítulos siguientes, se tendrán que hacer cambios de coordenadas entre los sistemas de referencia tridimensionales expuestos en este capítulo, por tanto vamos a ver cómo se expresarían, en los distintos sistemas de referencia vistos, las coordenadas de una misma posición del Sistema Solar.

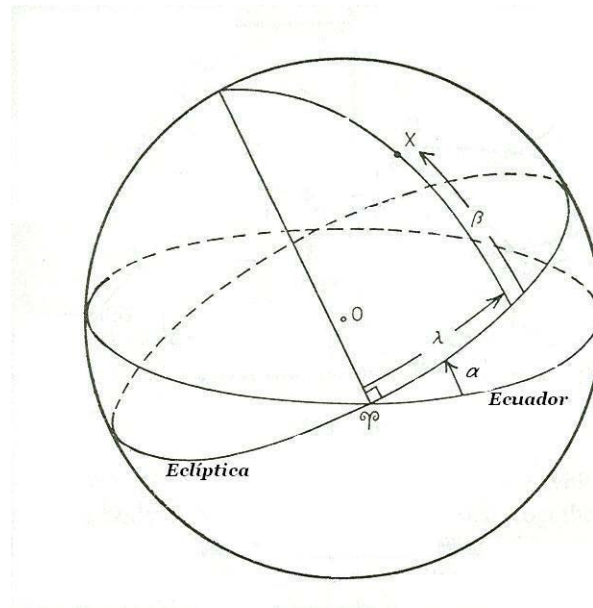
Ya hemos expresado con 2.1 y 2.2 cómo se pueden pasar las coordenadas rectangulares a las polares, esto es general y vale para los dos sistemas de referencia tridimensionales vistos. Ahora nos faltaría ver cómo se pasa una posición dada en coordenadas rectangulares geocéntricas, a coordenadas rectangulares heliocéntricas; y cómo se pasa dentro de unos mismos ejes de una posición en coordenadas polares ecuatoriales a coordenadas polares eclípticas. Conocidas estas transformaciones de coordenadas mencionadas, se podrán combinar para pasar una posición dada en unas coordenadas, a otras coordenadas cualquiera de las vistas.

Para pasar una posición dada en coordenadas rectangulares geocéntricas a coordenadas rectangulares heliocéntricas, sólo habrá que conocer las coordenadas rectangulares heliocéntricas de la Tierra, y sumárlas una a una con las coordenadas geocéntricas que tenemos. Puesto que los elementos orbitales de la Tierra serán conocidos, podremos calcular las coordenadas de su posición respecto del Sol en un momento dado, y sumando éstas a las coordenadas del objeto celeste respecto de la Tierra, obtendremos las coordenadas del objeto referidas al Sol.

Para transformar una posición dada en coordenadas polares ecuatoriales a coordenadas polares eclípticas, (ya sean geocéntricas o heliocéntricas), tendremos que hacer una rotación de los ejes de coordenadas. La forma en que se han hecho estos cambios de coordenadas en este trabajo ha sido la siguiente. Primero, mediante las expresiones 2.1 hemos pasado las coordenadas polares ecuatoriales a rectangulares ecuatoriales. Segundo, como tanto el sistema ecuatorial como el eclíptico tienen el eje  $x$  en común, se ha utilizado éste como eje para efectuar la rotación, entonces el valor de la coordenada  $x$  no varía, y sólo lo harán las coordenadas  $z$  e  $y$  (ver anexo A), con lo que efectuada la rotación obtendremos unas coordenadas rectangulares eclípticas. Y tercero, a partir de las coordenadas rectangulares obtenidas tras la rotación, aplicando las expresiones 2.2, obtenemos las coordenadas polares eclípticas deseadas de la posición dada. La matriz de rotación utilizada es la que se da a continuación, y su justificación se ha incluido en el anexo A de este trabajo.

$$\begin{bmatrix} x_{Eclip} \\ y_{Eclip} \\ z_{Eclip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{Ecuat} \\ y_{Ecuat} \\ z_{Ecuat} \end{bmatrix}$$

en esta matriz, el ángulo  $\alpha$  no tiene nada que ver con la ascensión recta, sino que es el ángulo girado en la rotación de los ejes de coordenadas. En nuestro caso,  $\alpha$  es el ángulo entre los planos ecuatorial y eclíptico que puede apreciarse en la figura 2.7, o en la figura 2.8, este ángulo tiene actualmente un valor aproximado de  $23.4^\circ$  y va variando por el efecto de precesión de los equinoccios, que hace moverse al ecuador terrestre. En los cálculos hechos más adelante mediante un programa, se calcula un valor más exacto en función de la fecha concreta en la que se realiza la rotación.



**Fig. 2.8** Angulo de inclinación  $\alpha$  entre los planos ecuatorial y eclíptico. Angulos de longitud  $\lambda$ , y de latitud  $\beta$  celestes de un punto X

Si quisiésemos hacer la transformación inversa a la anterior, o sea de coordenadas polares eclípticas, a polares ecuatoriales dentro de unos mismos ejes geocéntricos o heliocéntricos, el proceso sería análogo al anterior pero aplicando la matriz de rotación siguiente, justificada en el anexo A:

$$\begin{bmatrix} x_{Ecuat} \\ y_{Ecuat} \\ z_{Ecuat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{Eclip} \\ y_{Eclip} \\ z_{Eclip} \end{bmatrix}$$

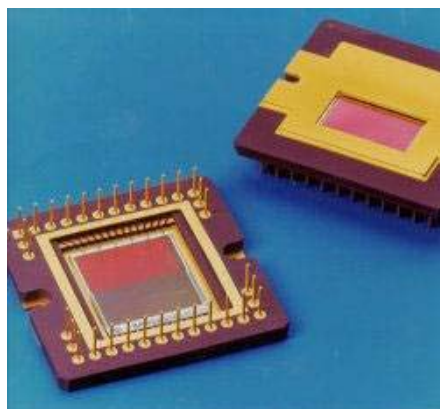
Hasta aquí, hemos visto los conceptos fundamentales sobre la determinación de la posición de un objeto celeste, que se aplicarán posteriormente en el cálculo de la posición de la sonda espacial. En el método de determinación de la posición que se explica en los capítulos posteriores, y

que se emplea en dos programas que efectuarán todas las operaciones necesarias, se hará uso de los conceptos explicados en este capítulo. Concretamente la aplicación de los mismos en líneas generales es la siguiente: para calcular la dirección en la que está un asteroide respecto de la sonda se necesitarán las posiciones de algunas estrellas, dadas en el sistema bidimensional de ascensión recta y declinación geocéntricas ( $\alpha$ ,  $\delta$ ); a partir de esas posiciones, se calcularán las coordenadas de ascensión recta y declinación del asteroide tal como se verían desde la sonda ( $\alpha_s$ ,  $\delta_s$ ). También se usarán las posiciones conocidas de la Tierra, y del asteroide en coordenadas heliocéntricas eclípticas ( $r$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ), para deducir la posición de la sonda en coordenadas geocéntricas ecuatoriales ( $r$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ), y una vez obtenidas éstas, se transformarán a coordenadas heliocéntricas eclípticas ( $r$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ), que serán las que finalmente den la posición definitiva de la sonda.

## CAPITULO 3. EL SENSOR CCD

Para llevar a cabo un sistema de determinación de la posición de una sonda espacial como el que estamos estudiando, basándonos en observaciones de las posiciones relativas de asteroides con respecto a las estrellas de fondo mucho más lejanas, será fundamental disponer de un sistema de captación de imágenes de alta precisión. Para ello utilizaremos un sensor CCD, cuyo nombre viene de Charge Coupled Device, la tecnología del cual lo hace idóneo para el tipo de aplicación que necesitamos.

En este tercer capítulo estudiamos cuáles son las principales características de estos sensores y sus principios de funcionamiento, ya que deberemos conocerlos para saber las ventajas y limitaciones de nuestro sistema de observación, y por extensión de nuestro sistema de posicionamiento. No entraremos a tratar cual sería la implementación concreta que podría ser necesaria en la sonda, sino que sólo se revisan cuáles son las técnicas de captación y tratamiento de las imágenes que sería necesario aplicar para obtener la imagen de calidad que requerirá el sistema de determinación de la posición de la sonda planetaria.



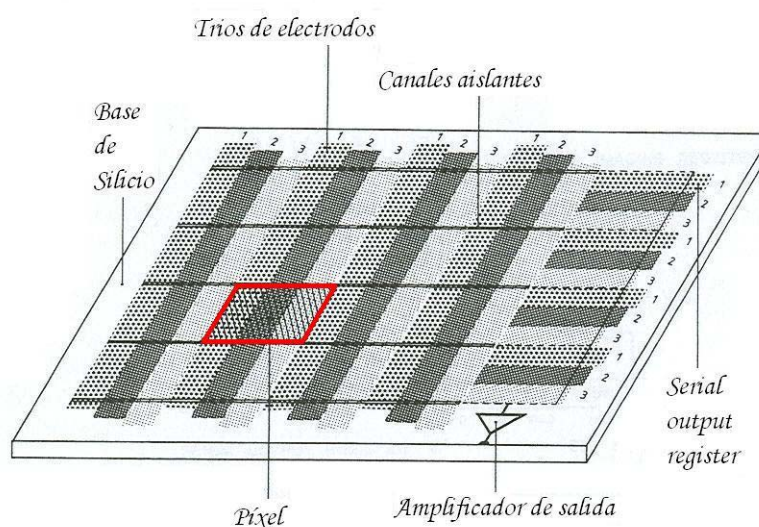
**Fig. 3.1** Aspecto de un sensor CCD

### 3.1. Fundamentos del funcionamiento de un sensor CCD

Un sensor CCD o dispositivo de carga acoplada se basa en el efecto fotoeléctrico que se produce al incidir la luz sobre un medio semiconductor. Aunque en un principio se diseñaron para utilizarse como dispositivos de memoria para ordenadores, pronto también se empezaron a ver sus aplicaciones como captadores de imágenes, y de los primeros sensores formados por una única hilera de píxeles, se pasó en poco tiempo a sensores bidimensionales con varios cientos de filas y columnas, y miles en la actualidad. Desde la década de 1970 se emplean en observatorios astronómicos profesionales, complementando o sustituyendo a los sensores químicos fotográficos tradicionales en este campo desde finales del siglo XIX, ya que un sensor CCD puede tener cien veces más sensibilidad lumínica que

una fotografía química. Más tarde, el uso de los nuevos sensores se hizo extensivo a un mercado más amplio que no sólo abarcó a la astronomía profesional y amateur, sino a una cantidad importante de cámaras fotográficas de gran consumo, por lo que no es difícil hoy en día disponer de sensores de buenas características técnicas a un bajo coste, esto los hace aún más apropiados para el sistema de posicionamiento para una sonda espacial de bajo coste como las que tienden a diseñarse para las más recientes misiones de exploración planetaria.

El dispositivo CCD está compuesto por una base rectangular o cuadrada de silicio semiconductor de entre 125 y 500 micrómetros de grosor, y unos pocos milímetros de lado, en función del modelo de que se trate. La superficie de silicio está cubierta por un conjunto de electrodos los cuales estarán conectados a un potencial determinado como se explica posteriormente. Estos electrodos están agrupados en bandas paralelas, de tres en tres tal como ilustra la figura 3.2, y perpendiculares a estas bandas hay unos canales separadores aislantes que separan los electrodos en pequeñas celdas para evitar que se pueda producir un movimiento de carga a lo largo de cada electrodo más allá de la longitud entre dos canales aislantes contiguos, estas celdas así formadas son los píxeles de la CCD y suelen ser de un tamaño del orden de 20 micrómetros de lado. En conjunto lo que se obtiene es una red de celdas o píxeles distribuidas en filas y columnas.



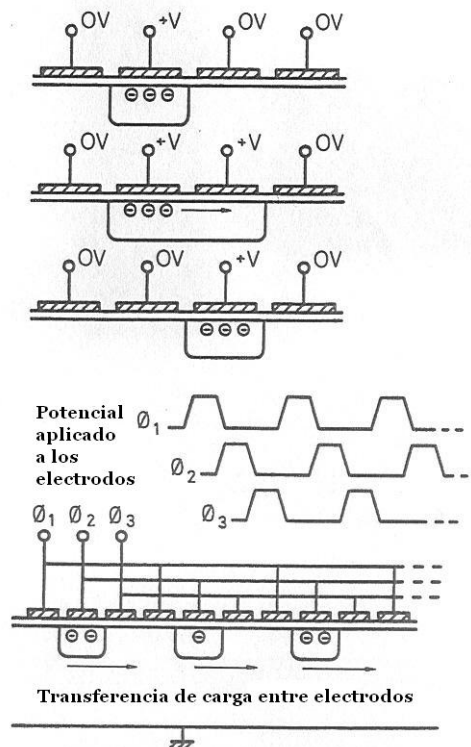
**Fig. 3.2** Elementos que componen un sensor CCD

El principio de funcionamiento del montaje anterior es el siguiente; la luz compuesta por fotones incide sobre el silicio produciendo que algunos electrones del mismo absorban la energía de un fotón y puedan liberarse de la estructura atómica del semiconductor quedando como electrones libres. Este es el llamado efecto fotoeléctrico, explicado por Albert Einstein hace ahora 100 años, y es la base del funcionamiento del sensor. De los grupos de tres electrodos mencionados antes, al central se le aplica un potencial positivo, por

lo que atraerá a los electrones liberados por fotones que hayan incidido en su entorno, por tanto habrá una proporción directa entre los electrones acumulados en el electrodo y la cantidad de fotones que han incidido en esa pequeña zona; es decir, tendremos una relación carga eléctrica-intensidad lumínica. Esto ocurre para cada porción del trío de electrodos comprendida entre dos canales aislantes contiguos, o lo que es lo mismo para cada píxel.

Del párrafo anterior se deduce que tras exponer la red de píxels a la luz procedente de cualquier fuente luminosa u objeto que la refleje, se producirá una acumulación de carga en cada píxel proporcional a la intensidad de luz de cada porción de esa fuente u objeto iluminado, por lo que si aplicamos un procedimiento que nos permita “leer” la distribución de cargas de los píxels, obtendremos una representación de la fuente u objeto captados por el sensor CCD. Esta captación de una imagen es análoga a la que se produce en un registro de fotografía química tradicional, en la que cada píxel sería cada grano del material fotosensible que forma un negativo fotográfico, y que reacciona más o menos en función de la intensidad lumínica que incide localmente sobre él, el conjunto de estos granos impresionados formará una imagen del objeto fotografiado, de la misma forma que lo hace el conjunto de píxels una vez leída su carga acumulada y traducida a una escala de intensidades lumínicas. En la práctica, igual que ocurre con las cámaras convencionales el sensor CCD se encontrará en el plano focal imagen de una lente que hará de objetivo, y habrá un obturador que se abrirá y dejara que la luz incida en el sensor durante el tiempo de exposición que se requiera.

Hasta aquí hemos dicho que cada píxel está compuesto por una porción aislada de tres electrodos, y que el central de ellos es el que acumula los electrones liberados por los fotones, luego los otros dos electrodos no se han usado para la captación de la imagen, la función de estos tiene que ver con la lectura de la imagen captada como se explica a continuación. El proceso de lectura de la carga acumulada en cada píxel se realiza variando el potencial aplicado a los grupos de tres electrodos. Lo que se hace es que el electrodo central con potencial positivo que retenía las cargas, vaya perdiendo progresivamente ese potencial al mismo tiempo que se va aumentando el potencial en el electrodo siguiente, de forma que la carga acumulada sea atraída por el electrodo contiguo y se produzca una transferencia de los electrones de un electrodo a otro, (ver figura 3.3). Tras este proceso de transferencia tenemos la carga en el tercer electrodo de un píxel que es contiguo al primer electrodo del píxel siguiente, si ahora repetimos el mismo proceso entre estos dos electrodos contiguos la carga pasará a este primer electrodo del siguiente píxel. Repitiendo estas variaciones sincronizadas del potencial aplicado a los electrodos, se lleva a cabo en todos los electrodos que forman una fila de píxels, de modo que habremos conseguido transferir todas las cúmulos de carga de los píxels de esa fila a la siguiente fila; y si este proceso se realiza en todas las filas a la vez obtendremos que la imagen captada por todos los píxels del sensor CCD se haya desplazado una fila. Según la figura 3.2 anterior las filas van de arriba a abajo del dibujo, y las columnas de derecha a izquierda, entonces la carga se habrá desplazado una fila a la derecha en la figura 3.2, y también lo habrá hecho en la figura 3.3.

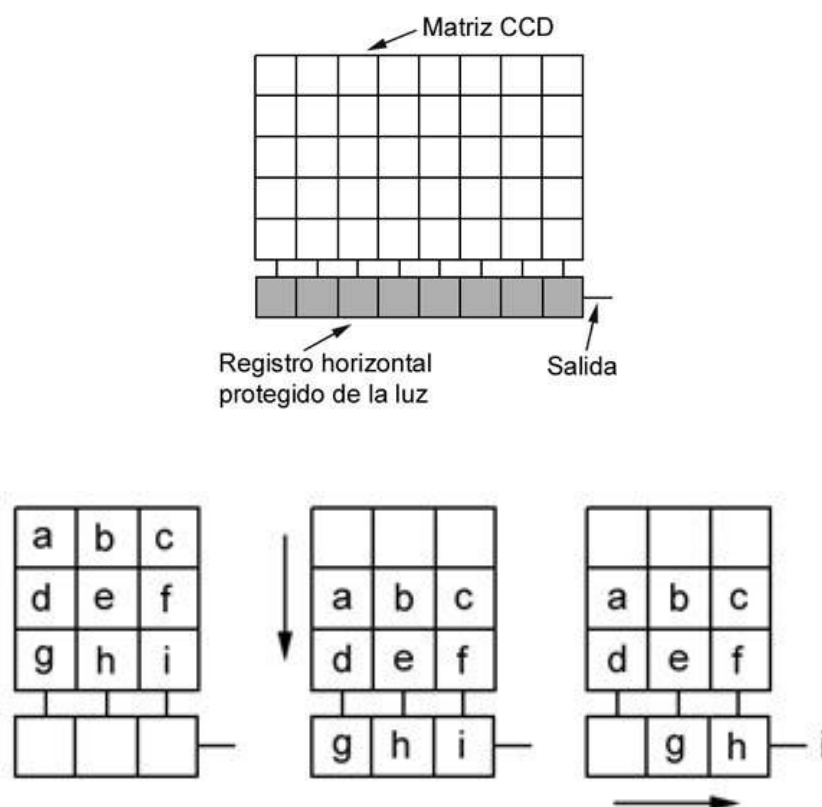


**Fig. 3.3** Secuencia de la transferencia de carga entre electrodos, los tres electrodos de la izquierda forman un píxel, y el siguiente electrodo ya pertenece al píxel contiguo. La forma de onda representada es la de la variación de los potenciales en el tiempo, de los tres electrodos de un mismo píxel

Al desplazarse todas las cargas de cada píxel de una fila, a cada píxel contiguo de la siguiente fila a su derecha, debemos prever un mecanismo para evitar perder las cargas en la fila más a la derecha del sensor, ya que no habría píxels más allá a los que transferir su carga. Para ello existe una fila extra de píxels de mayor tamaño, y formados esta vez por tres electrodos en posición perpendicular al resto de los electrodos que formaban los píxels del sensor, (ver de nuevo la figura 3.2); estos píxels extra no se exponen a la luz de la imagen que hemos captado, sino que en cada uno de ellos sólo se recoge la carga desplazada desde la última fila de píxels de la derecha de la figura 3.2, así pues estos píxels extra no hacen el papel de captadores de imagen sino de acumuladores temporales de las cargas que queremos leer. A esta fila de píxels se le llama canal de lectura o en inglés serial output register. Una vez la carga ha sido acumulada en estos electrodos se realiza una transferencia por el mismo sistema de variación de los potenciales de los electrodos explicada anteriormente, pero esta vez en dirección perpendicular a la anterior, de tal forma que la carga de cada píxel vaya pasando píxel a píxel por un amplificador de salida. Pasado el amplificador, esa carga es cuantificada y se le asigna un valor numérico que queda almacenado en una memoria, quedando por tanto registrada una secuencia de números que codifica los valores de carga de la fila de píxels, y por tanto la intensidad lumínica captada por ellos. Cuando esta fila ha sido leída, el proceso comienza de nuevo moviendo todas



las filas una posición a la derecha en la figura 3.2 para poder leer la siguiente fila de píxeles, esto se realiza para todas las filas del sensor CCD, y al final del proceso tenemos en la memoria la codificación numérica de toda la imagen captada. Todo este proceso de lectura de toda una imagen registrada en un sensor de 1000 filas por 1000 columnas de píxeles puede tardar entre 1 segundo y pocos segundos en función de la complejidad de la imagen. Todo el proceso de lectura explicado se representa en la siguiente figura 3.4.



**Fig. 3.4** Esquema de la configuración de los píxeles, y de la transferencia de carga de cada uno de ellos

### 3.2. Características técnicas de un sensor CCD

Una vez visto el principio de funcionamiento del fotosensor, vamos a comentar brevemente cuáles son las peculiaridades técnicas que caracterizarán a un sensor CCD, a parte de su superficie total, y la de cada uno de sus píxeles.

Un primer factor que caracteriza a un sensor CCD es la llamada **eficiencia cuántica** que mide la relación entre los fotones que inciden en el sensor y los que son realmente detectados por este. Algunos de los fotones incidentes serán reflejados por la superficie del sensor, y otros serán absorbidos por los electrodos colocados encima del material semiconductor, en ambos casos no llegarán a interactuar con el material semiconductor ni liberarán ningún electrón, por lo que su incidencia no quedará registrada. En

los casos en los que sí se libera un electrón este puede recombinarse en el semiconductor y no llegar al electrodo. Es decir, que no todos los fotones incidentes quedan registrados por el correspondiente electrón en el electrodo más cercano. La eficiencia cuántica se mide en tantos por cien de fotones que llegan y que se detectan, y debe ser superior al 60 %.

Otra característica es la **sensibilidad espectral**, que hace referencia a la distinta eficiencia cuántica para distintas frecuencias de la luz incidente; esta eficiencia decae casi a cero para luz de longitudes de onda largas (infrarrojo), y para longitudes de onda cortas (ultravioleta), dependiendo del tipo de CCD.

La **linealidad** de los detectores CCD es una de sus principales características técnicas e indica que la cantidad de fotones incidente es directamente proporcional a los electrones almacenados en el electrodo correspondiente, lo que convierte a estos sensores en idóneos para aplicaciones fotométricas, es decir para medir el brillo de un objeto. Como comparación hay que hacer notar que esta característica no existe en la fotografía química.

La **capacidad del píxel** hace referencia a cuanta carga es capaz de almacenar un electrodo de un píxel, ya que a partir de esta, si sigue incidiendo luz sobre él, se producirá un movimiento de electrones hacia píxeles contiguos en su columna, creando las características líneas rectas luminosas que aparecen en algunos puntos muy luminosos de una imagen captada por un sensor CCD, y que degradan la imagen.

El **rango dinámico** es el número de niveles diferentes de intensidad lumínica que es capaz de diferenciar el sensor, y será proporcional a la capacidad de los píxeles para acumular electrones.

Para cada intensidad lumínica se asignará un número entero que quedará registrado en memoria; hay que resaltar que estos valores numéricos no corresponderán al número de electrones almacenado en cada píxel, ya que este sería un número muy grande; en cambio, lo que se hace es dividir el número de electrones detectado entre un número fijo al que se llama **ganancia**, al resultado de esta operación se le llama número de cuentas de cada píxel.

### 3.3. Problemas en la captación de imágenes

La utilización de sensores CCD, además de aportar ventajas importantes a la captación de imágenes de la sonda espacial, también aportará algunos problemas que habrá que tener en cuenta en el diseño del sistema de determinación de la posición que tratamos en este trabajo. Los problemas que podemos encontrarnos son debidos a los factores que vamos a describir en este apartado.

El proceso de lectura de las cargas acumuladas en los píxeles tras la captación de una imagen, no se produce de la forma ideal que se ha descrito anteriormente, sino que el recuento de electrones conlleva intrínsecamente

cierta indeterminación natural debida entre otros factores al principio físico de incertidumbre de Heisenberg. En consecuencia, no se podrá obtener una precisión absoluta en la determinación de la luz que ha incidido en cada píxel. Por otro lado el proceso de amplificación y tratamiento electrónico de las señales desde que son captadas hasta que quedan almacenadas en la memoria, también conlleva la inclusión de pequeñas alteraciones no deseadas en los resultados de la imagen. La adición de estas variaciones sobre los datos objetivos que hubiéramos obtenido del sensor de una forma ideal supone un error en la determinación de la imagen captada, y es lo que se conoce como **ruido de lectura**.

Otro fenómeno no deseado que ocurre en el sensor es la llamada **corriente de oscuridad**, que se debe a unos electrones que aparecerán en el recuento de cargas incluso sin que haya incidido luz sobre la CCD. Estos electrones aparecen al ser extraídos del silicio no por efecto fotoeléctrico sino por la agitación térmica del material, siendo captados por los electrodos de los píxeles, y creando una perturbación en la luminosidad detectada. A mayor temperatura del silicio mayor agitación térmica se producirá y mayor número de electrones alcanzarán la energía suficiente para quedar libres, sumándose a los electrones liberados por los fotones incidentes, por lo que nos interesa hacer trabajar al sensor a temperaturas bajas, y para ello se tendrán que incluir sistemas de **refrigeración** de los sensores CCD.

Durante el tiempo que dejamos que la luz incida en el sensor para captar una imagen es posible que se produzca también la captación de alguno de los llamados **rayos cósmicos**, constituidos por partículas subatómicas que se mueven a gran velocidad por el casi vacío espacial. Al chocar con las moléculas de gas de la atmósfera terrestre emiten partículas menos masivas llamadas muones, que aunque son de vida muy corta llegan a gran velocidad hasta la superficie terrestre y pueden incidir en el sensor provocando que se liberen electrones del silicio, alterando así la carga debida a la luminosidad incidente que queremos registrar.

Un último factor que tenderá a falsear el brillo real de los objetos que queremos captar será la **luminosidad de fondo** que pueda incidir en todo el sensor al mismo tiempo proveniente de la luz solar directa, reflejada en el interior del instrumento óptico de captación, o reflejada en distintos cuerpos celestes, e incluso otras fuentes de luz ajenas a la imagen que se desea captar.

### 3.3.1. Relación señal-ruido

Como se ha visto, hay distintos factores que afectarán al recuento de electrones efectuado en cada píxel, por lo que este no será exactamente proporcional a la intensidad lumínica directa recibida de los objetos a fotografiar como sería deseable, sino que aparecerán perturbaciones que tendremos que tener en cuenta para intentar minimizar sus efectos, y que la imagen captada sea lo más fiel posible a la imagen real. A todo este conjunto de perturbaciones de la imagen captada es a lo que llamamos ruido de la imagen.

Vista la definición de “Ruido de la imagen”, ahora definimos “Señal de la imagen”, como el número de electrones cuantificados en cada píxel debidos exclusivamente a la incidencia de los fotones provenientes de los objetos que queremos captar. Es decir al cuantificar el total de electrones acumulados en cada píxel, obtendremos la “Señal de la imagen” deseada pero con un cierto nivel de incertidumbre en su valor debido al “Ruido de la imagen” incluido. La relación entre la señal y su incertidumbre o ruido es lo que llamamos relación señal a ruido de la imagen captada.

$$\text{Relación señal-ruido} \equiv \frac{\text{Señal}}{\text{Ruido}} = \frac{\text{Signal}}{\text{Noise}} = \frac{S}{N}$$

Como se deduce de las definiciones dadas, nos interesarán relaciones señal a ruido altas pues indicarán un nivel de señal claramente superior al de ruido, que es el caso deseable para obtener una buena imagen. Para obtener resultados aprovechables de la imagen, la relación señal a ruido no debe estar por debajo de 2, es decir tener el doble nivel de señal que de ruido, pero es aconsejable tener valores como mínimo de 4 para poder realizar mediciones de carácter astrométrico con suficiente rigor como las que realizará la sonda espacial.

### 3.4. Captura de la imagen

Para conseguir la captación de una imagen con la relación señal a ruido lo más alta posible, una técnica muy utilizada consiste en la toma de sucesivas fotos de un mismo motivo, y después sumarlas todas con software de tratamiento de imágenes. Con esta técnica se consigue una relación S/N más alta debido a que el nivel de señal de la suma de las imágenes es igual a la suma de la señal de cada toma individual (ver expresión 3.1). No ocurre lo mismo con el nivel de ruido de la suma, sino que experimentalmente se ve que éste se suma en cuadratura según la expresión 3.2, es decir su suma es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados del ruido de cada toma individual. La justificación de esto es que las causas del ruido de cada toma se comportan de forma aleatoria e independiente unas de otras, por lo que su contribución conjunta se trata estadísticamente como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada contribución individual. Es decir, si tenemos por ejemplo tres imágenes independientes los niveles de señal S y de ruido N conjunto serán:

$$S_{total} = S_1 + S_2 + S_3 \quad (3.1)$$

$$N_{total} = \sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2} \quad (3.2)$$

si las tres tomas de la misma imagen son captadas en condiciones similares, podemos decir que sus tres niveles de señal  $S$  y de ruido  $N$  serán aproximadamente iguales, y por tanto la relación señal a ruido de la suma de las tres tomas será:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{total} = \frac{3S}{\sqrt{3N^2}} = \frac{3S}{N\sqrt{3}}$$

luego ha crecido más el nivel de señal, ya que se ha multiplicado por 3, que el nivel de ruido que se ha multiplicado por  $\sqrt{3} \approx 1.73$ , por tanto la relación  $S/N$  será mayor para la suma de las tres tomas que para cada toma individual, obteniéndose por tanto una mayor calidad en la imagen suma. En general cuantas más imágenes se sumen mejor será el valor señal-ruido; para  $n$  tomas iguales la relación será:

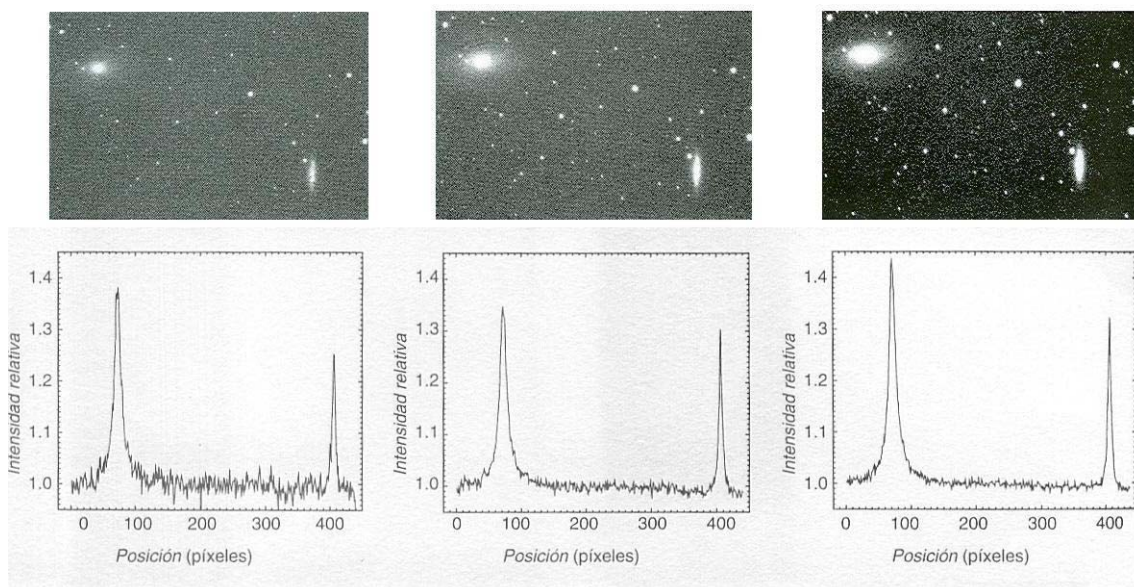
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{total} = \frac{nS}{\sqrt{nN^2}} = \frac{nS}{N\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{S}{N}$$

luego la imagen suma habrá mejorado ya que la relación  $S/N$  del conjunto sumado será  $\sqrt{n}$  veces mayor que cada  $S/N$  individual, si por ejemplo sumamos cuatro tomas de una misma imagen su relación  $S/N$  se hará el doble, y si sumamos nueve tomas se hará el triple, sin embargo al realizar varias tomas de la misma imagen el ruido de lectura que se había definido antes, se produce y acumula en la lectura de cada toma, por lo que sumar demasiadas tomas produciría un efecto inverso al deseado.

Visto lo anterior hay que comentar que también podríamos mejorar la relación  $S/N$  mediante una toma de mayor tiempo de exposición, ya que al incidir la luz más tiempo sobre el sensor obtendríamos un nivel de señal mayor, mientras que el ruido de lectura de la imagen sólo contribuiría una vez. Por tanto, para que se opte por la suma de imágenes de menor tiempo de exposición en lugar de una sola exposición de mayor tiempo, es necesario que contemos con un sensor CCD en el que el ruido de lectura sea pequeño, en este caso el procedimiento de la suma de imágenes produce una relación  $S/N$  mayor, y además tiene las ventajas respecto al de una sola toma más larga, pues no aparecen problemas de movimiento de los objetos móviles fotografiados, hay menos tiempo para que pueda incidir algún rayo cósmico en cada imagen individual, y también es menos probable que algunos píxeles se saturen en puntos de luminosidad intensa.

En la figura 3.5 se puede ver el efecto de la relación señal ruido en tres tomas de un mismo campo celeste con las galaxias M81 y M82; la relación es menor en la fotografía de la izquierda y aumenta en las dos más a la derecha. Se puede ver como a mayor relación señal a ruido la toma es más nítida, y se

aprecian más detalles y mayor número de estrellas. Debajo de cada toma se incluye una gráfica con el nivel de señal a ruido en el eje de ordenadas, y en el de abscisas, la posición en número de píxeles en una recta que recorre cada fotografía en diagonal de izquierda a derecha, por tanto los picos más altos de la gráfica corresponden a la posición de los centros luminosos de las dos galaxias.



**Fig. 3.5** Aspecto y gráficas S/N de tres tomas CCD de un mismo campo, la relación S/N es mayor en la toma de la derecha

### 3.5. Tratamiento de la imagen captada

Una vez obtenida la imagen del objeto u objetos deseados con la mayor relación señal-ruido posible, será necesario aún hacer algunos pasos más para obtener una imagen suficientemente precisa. Como se ha visto antes había varios factores que alteraban la acumulación de cargas debidas a la luz incidente, y ahora habrá que minimizar sus efectos sobre la imagen captada.

Al seguir la trayectoria de varios rayos de luz desde que entran en el sistema óptico acoplado a nuestro sensor CCD hasta que quedan registrados como valores numéricos, veremos la existencia de diversos factores que alterarán estos rayos de luz, y por tanto al resultado de la imagen, y que lo harán por igual a todos los haces de luz independientemente de su intensidad lumínica, mientras que otros factores serán proporcionales a la intensidad del haz. Los primeros son llamados factores aditivos, ya que su efecto se suma al de la señal producida por la luz incidente independientemente del nivel de esta, y pueden ser reducidos conociéndolos y restándolos de la imagen obtenida. Los segundos factores son los llamados multiplicativos, ya que su contribución es proporcional al nivel de señal producido por la intensidad del haz de luz captado, estos factores podrán contrarrestarse conociendo su efecto, y

dividiendo píxel a píxel la imagen que tratamos de mejorar entre una imagen que sólo incorpore este efecto.

Para explicar los tipos de factores mencionados que afectan al resultado de la imagen captada, se pueden ver los elementos que afectan a los fotones en su camino hasta que quedan registrados por el sensor CCD; estos elementos se pueden resumir en los siguientes:

- Los fotones que llegan hasta el sensor generarán una señal **S** proporcional a su intensidad lumínica **R<sub>0</sub>** y al tiempo de exposición **t**, es decir,  $S = R_0 \cdot t$ .
- Las lentes del sistema óptico producen un efecto de viñeteo que consiste en permitir preferentemente el paso de los rayos próximos al eje óptico creando una zona menos luminosa hacia los márgenes del sensor, este será un factor de efecto multiplicativo que denominaremos **V**.
- Partículas de polvo u otras obstrucciones reducen la intensidad de algunos rayos de luz, y producen sobre la imagen sombras y patrones de difracción, este será otro factor con efecto multiplicativo que denominaremos **s**.
- El disparador que permite pasar la luz hacia el sensor durante el tiempo de exposición se abre y cierra a una velocidad finita, por lo que produce una ligera variación en la obstrucción de diferentes haces y por tanto en su tiempo de incidencia sobre el sensor. Este efecto lo podemos incluir en el efecto multiplicativo visto antes **V**.
- La eficiencia cuántica no es la misma para todos los píxels por lo que no reaccionarán exactamente igual ante un mismo estímulo luminoso. Este será otro factor multiplicativo, y lo denominaremos **q**.
- Durante el tiempo de exposición el sensor produce la corriente de oscuridad que se había definido anteriormente. Este será un efecto aditivo que producirá una falsa señal **S<sub>d</sub>** proporcional a su nivel de actividad, (proporcional a la temperatura), dado por **R<sub>d</sub>**, y al tiempo durante el que se produce este efecto **t<sub>d</sub>**, es decir,  $S_d = R_d \cdot t_d$ .
- La electrónica del sensor introduce una corriente llamada de polarización para cargar los electrodos de los píxels para su funcionamiento normal, y para producir una acumulación inicial de carga que evite que se produzcan cuentas de electrones negativas por la influencia del ruido en zonas de incidencia de baja intensidad lumínica. Esto genera otra falsa señal en todos

los píxels incluso sin luz o con tiempo de exposición cero. Este es otro efecto aditivo que llamaremos **B**.

Resumiendo en una expresión matemática los factores aditivos y multiplicativos anteriores que afectan a la señal recogida por el sensor CCD, se puede expresar la señal total  $S$  como:

$$S = R_0 \cdot t \cdot V \cdot s \cdot q + R_d \cdot t_d + B$$

Para intentar obtener la mejor imagen posible hay que ir minimizando las diferentes contribuciones no deseadas a la señal final de la expresión anterior, y hay que hacerlo en el orden inverso al que se han ido produciendo, ya que cada defecto se ha ido acumulando sobre el anterior y unos son multiplicativos y otros aditivos, por lo que matemáticamente se puede ver que no daría lo mismo si primero restamos y después dividimos, que si primero dividimos y después restamos para quitar los efectos no deseados. Es decir, primero tendremos que restar cierta cantidad de señal para reducir los efectos de la corriente de polarización **B**, y después los de la corriente de oscuridad  $R_d \cdot t_d$ , y por último dividiremos para minimizar los efectos multiplicativos  $V \cdot s \cdot q$ .

Para minimizar primero el efecto de la corriente de polarización, (también llamado nivel de sesgo), tendremos que cuantificar su efecto y luego restarlo de la imagen total captada. Para ello se realizan dos tomas de imagen sin que incida luz sobre el sensor, estas tomas se conocen como tomas oscuras o dark frames, y en éstas la señal registrada sólo es debida a los efectos explicados anteriormente de las corrientes de polarización o de sesgo, y de oscuridad, ya que no se habrán liberado electrones por efecto fotoeléctrico. Si damos a la segunda de estas tomas de imagen el doble de tiempo de exposición que a la primera las señales obtenidas en ellas serán:

$$D_1 = R_d \cdot t_1 + B$$

$$D_2 = R_d \cdot 2t_1 + B$$

por lo que para determinar el efecto en la señal de la corriente de polarización **B** podemos hacer el siguiente cálculo mediante software de tratamiento de imágenes, y obtendremos una toma con la única contribución de la corriente de polarización, o nivel de sesgo:

$$2D_1 - D_2 = 2R_d \cdot t_1 + 2B - R_d \cdot 2t_1 - B = B$$

obtenida esta toma conocida como toma de polarización, imagen de sesgo, o bias frame, la podemos restar de la toma original con la señal total captada que



habíamos obtenido, eliminando así el efecto de la corriente de polarización sobre ella.

Después de lo anterior, para minimizar el segundo efecto aditivo de la corriente de oscuridad, primero debemos cuantificarla, para lo que realizan de nuevo tomas oscuras, tomando una imagen cuando no está incidiendo ninguna luz en el sensor, por lo que lo único que se detectará será la corriente de oscuridad más la de polarización. Para que la corriente de oscuridad de estas tomas sea lo más parecida posible a la que se haya producido en la imagen que estamos tratando de mejorar, sus tiempos de exposición deberán ser iguales y la temperatura del sensor la misma. Una vez conseguida estas tomas oscuras habrá que restarles el efecto de corriente de polarización con la toma de polarización realizada anteriormente, y una vez libres de este factor de polarización, en las tomas oscuras sólo quedarán los efectos de la corriente de oscuridad que queríamos cuantificar. Ahora sólo queda restar esta toma oscura de la toma de la imagen que queremos tratar para quitarle el efecto de la corriente de oscuridad.

En los dos casos anteriores para minimizar el efecto del ruido de las tomas oscuras utilizadas lo que se hace es realizar varias tomas oscuras o de polarización y sumarlas para aumentar su relación S/N entonces es esta suma de tomas la que se resta de la toma de la imagen original que estamos tratando de mejorar.

Hasta aquí hemos minimizado los dos factores aditivos que tenía nuestra toma original, o sea los efectos de corriente de polarización y oscuridad, ahora falta minimizar el efecto de los tres factores multiplicativos mediante el denominado aplanado del campo. Los tres factores vistos  $V$ ,  $s$ , y  $q$  causarán que, aunque sobre el sistema óptico acoplado al sensor CCD incida una imagen de luminosidad totalmente uniforme, lo que quede registrado por el sensor sea una imagen con una luminosidad no uniforme, por lo que habrá que detectar estas variaciones de luminosidad en una imagen llamada toma plana o flat frame, y dividir la imagen original entre esta toma. Para ello, habrá que tomar imágenes con el sistema óptico enfocado en un campo de luminosidad uniforme; entonces en la imagen quedarán registradas las mismas heterogeneidades de luminosidad que en nuestra imagen original. A estas tomas planas habrá que quitarles los efectos de corriente de polarización y de oscuridad como se ha descrito anteriormente, luego promediar varias de estas tomas para minimizar el efecto del ruido, y por último dividir la toma de la imagen original entre esta suma de tomas planas.

En resumen, el proceso global para obtener la imagen más fiel posible a la realidad que se desea capturar se hará lo siguiente. Obtenemos una imagen con una señal total que incluye las contribuciones no deseadas vistas antes, esta imagen será la llamada imagen en bruto o en inglés raw image. La señal de esta toma en bruto será

$$S = R_0 \cdot t \cdot V \cdot s \cdot q + R_d \cdot t_d + B$$

a ésta, por el procedimiento explicado, le quitamos el efecto de la corriente de polarización **B**, restando la toma de polarización

$$S = R_0 \cdot t \cdot V \cdot s \cdot q + R_d \cdot t_d + B - B$$

$$S = R_0 \cdot t \cdot V \cdot s \cdot q + R_d \cdot t_d$$

al resultado, por el procedimiento explicado, le sustraemos el efecto de la corriente de oscuridad **R<sub>d</sub>·t<sub>d</sub>**, restando la toma oscura

$$S = R_0 \cdot t \cdot V \cdot s \cdot q + R_d \cdot t_d - R_d \cdot t_d$$

$$S = R_0 \cdot t \cdot V \cdot s \cdot q$$

y el resultado lo dividimos por una toma plana que incluirá los factores multiplicativos **V**, **s**, y **q** vistos,

$$S = \frac{R_0 \cdot t \cdot V \cdot s \cdot q}{V \cdot s \cdot q}$$

$$S = R_0 \cdot t$$

con lo que al final del proceso, en el caso ideal, conseguimos una imagen donde la señal sólo sea la debida a la incidencia de luz sobre el sensor CCD, y en un caso más real, una imagen donde se han minimizado los efectos vistos que falseaban el valor de la señal debida a la luz.

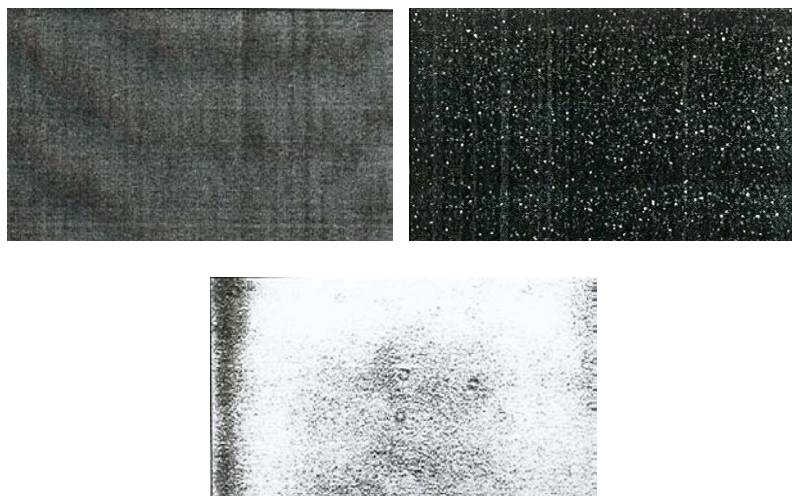
En la terminología habitual inglesa se suele expresar este mismo proceso de tratamiento de la imagen captada con la siguiente expresión:

$$\text{Calibrated image} = \frac{(\text{Raw image} - \text{Bias image} - \text{Dark image})}{(\text{Flat image})}$$

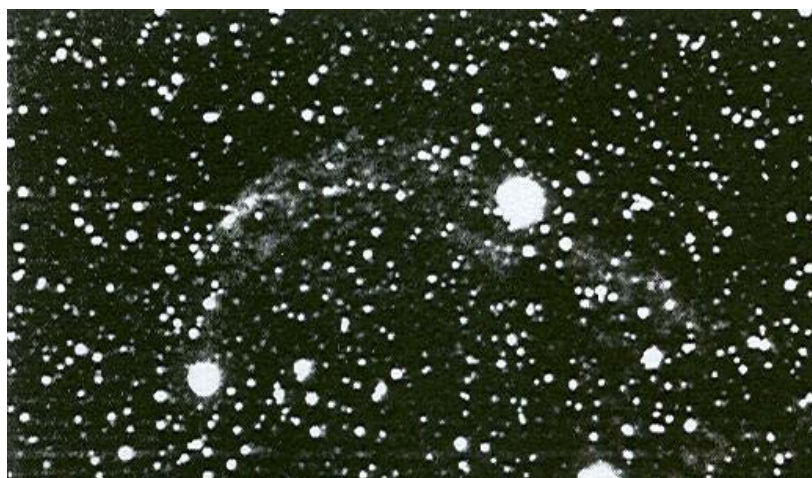
En las siguientes figuras 3.6, 3.7, y 3.8, se muestra un ejemplo de una imagen captada por una CCD en bruto, y cada una de las tomas necesarias para obtener una imagen calibrada a partir de la primera.



**Fig. 3.6** Imagen en bruto



**Fig. 3.7** Tomas para calibrar la imagen en bruto, la superior izquierda es la de polarización, la derecha es la de oscuridad, y la inferior la toma plana



**Fig. 3.8** Imagen calibrada

## CAPITULO 4. ASTROMETRIA DESDE LA SONDA

Una vez visto en el capítulo anterior, cuáles son los principios de funcionamiento y las características del sensor de captación de imágenes que irá a bordo de la sonda interplanetaria, ahora tenemos que ver cómo se puede extraer de las imágenes captadas, la información necesaria para poder determinar la posición de la sonda dentro del Sistema Solar. En este capítulo, se estudia la forma de obtener las coordenadas celestes de ascensión recta y declinación ( $\alpha$ ,  $\delta$ ), de un asteroide o planeta a partir de su imagen captada desde la sonda por el sensor CCD. Con el procedimiento de obtención de esas coordenadas, quedará determinada la posición del cuerpo respecto de las estrellas de fondo, y será posible calcular la posición de la astronave por los métodos propuestos en el capítulo 5.

### 4.1. Determinación de la posición de la sonda

Para hallar la posición en la que se encuentra la sonda espacial, capturaremos una imagen del asteroide, u otro cuerpo del Sistema Solar, que nos vaya a servir como referencia; en el mismo campo de la imagen, también captaremos las estrellas que se encuentren detrás del cuerpo. Como se vio al explicar el concepto de paralaje en el capítulo 1, la posición relativa del cuerpo celeste observado respecto al fondo de estrellas, dependerá de la posición desde donde se haya tomado la imagen, es decir, de la posición de la sonda en su trayectoria por el Sistema Solar. Por tanto, esta posición relativa al fondo de estrellas nos permitirá calcular la posición de la sonda. La forma de hacerlo, se explicará en el capítulo 5, pero primero es necesario dar un método para cuantificar con precisión la posición del asteroide respecto al fondo estelar, y eso es lo que se vamos a estudiar en este capítulo.

Una vez elegido el asteroide más apropiado para usar como guía en un determinado momento de la trayectoria, y obtenida su imagen con el sensor CCD, habrá que extraer de ella la información que necesitamos sobre la posición del asteroide, para hacerlo, habrá que aplicar un método astrométrico, llamado método de las constantes de la placa, con el que se podrá determinar con precisión la posición del asteroide respecto de las estrellas, o lo que es lo mismo, las coordenadas celestes ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) del asteroide visto desde la posición de la sonda en ese momento.

### 4.2. Astrometría desde la sonda espacial

Por astrometría nos referimos en general, a los procedimientos y métodos necesarios para medir las posiciones y movimientos de los astros en la esfera celeste. En particular, como se ha comentado antes, en nuestro caso utilizaremos técnicas astrométricas para determinar las coordenadas del asteroide visto desde la sonda espacial, y para ello, se usarán algunas de las

estrellas captadas junto al asteroide, cuyas coordenadas serán conocidas a partir de un catálogo estelar contenido en una base de datos de la sonda.

El sensor CCD de navegación óptica de a bordo, será una herramienta muy apropiada para realizar astrometría, no sólo debido a su función de captador de imágenes, sino también por su alta sensibilidad; que nos permitirá apreciar estrellas débiles en el campo de la imagen captada, de forma que podamos disponer de suficientes estrellas de fondo de posición conocida, para deducir la posición del asteroide. Además como se ha visto antes, el sensor CCD es por construcción una trama de filas y columnas de píxels, lo cual lo hace muy adecuado para determinar la posición de cada objeto captado dentro de ese entramado, así como para medir las distancias dadas en píxels o en fracciones de píxels entre estos objetos.

### 4.3. Ajuste de centroides

El primer paso importante para la determinación de las coordenadas del asteroide, es medir su posición en la imagen tomada, para poderla comparar con las posiciones de las estrellas medidas en la misma imagen. Sin embargo, los objetos captados por la CCD normalmente ocuparán más de un píxel, y por tanto, lo primero a realizar, será buscar el centro de la imagen de los objetos para realizar desde allí las mediciones de sus posiciones relativas. Este procedimiento de búsqueda del centro de la imagen captada de cada objeto, se conoce como ajuste de centroides.

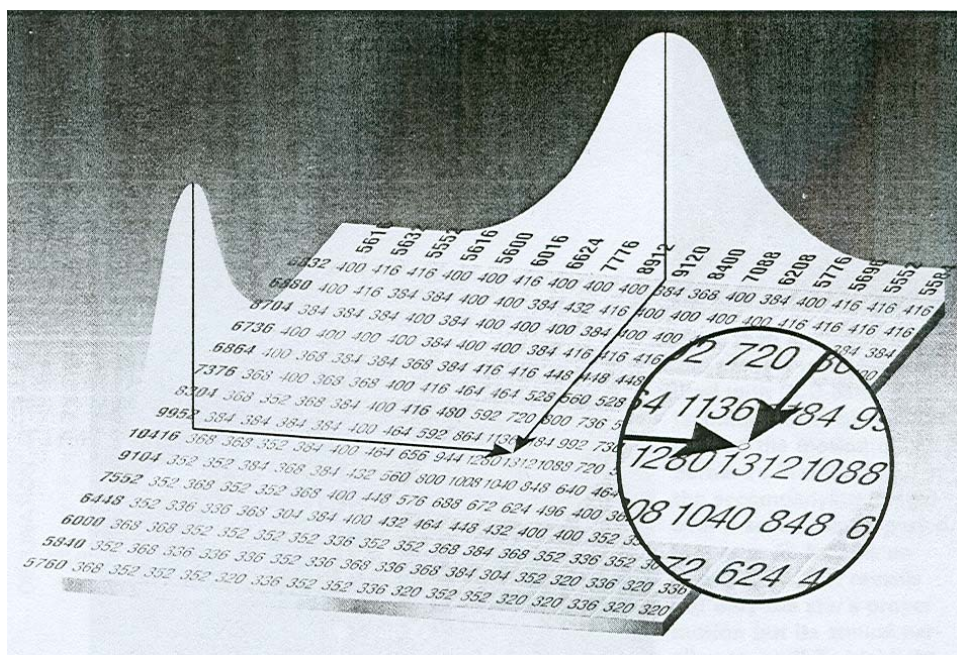
Cualquier imagen de un objeto celeste tomada a través de un instrumento óptico, aunque ésta sea la de una fuente de luz puntual, producirá una imagen captada del objeto que no será un punto, sino que tendrá ciertas dimensiones, quedando más luminosa en su centro y oscureciéndose hacia sus extremos. Esto se debe a los efectos de la difracción de la luz, y de aberraciones generadas por las lentes. Entonces, nos interesará determinar con la máxima exactitud posible la posición del centro de la imagen del objeto, para poder determinar lo más exactamente posible en que posición de la esfera celeste se encuentra dicho objeto.

Vamos a ver dos posibles maneras de localizar la posición del centro de la imagen. La primera se basa en ajustar los valores numéricos de luminosidad registrados por los píxels, a una curva gaussiana, de forma que los valores correspondientes a las luminosidades mayores den lugar a la zona del pico central de la curva, en esta zona existirá un máximo bien definido que indicará el punto de mayor luminosidad o centro de la imagen. Este ajuste, habrá que hacerlo en las dos dimensiones del sensor CCD, entonces, los puntos definidos por los dos máximos de las curvas gaussianas horizontal y vertical, nos darán las coordenadas del centro de la imagen con una gran precisión dentro de las dimensiones de un píxel individual, (ver figura 4.1). La segunda manera de encontrar el centro de un objeto captado, es mediante un proceso análogo al que se emplea para encontrar el centro de masas de un cuerpo o conjunto de cuerpos bidimensionales, por lo que recibe el nombre de “determinación del



centro de masas de la imagen”; en este caso el equivalente a la masa en cada posición, es el valor numérico proporcional a la luminosidad incidente en cada píxel.

Para la primera forma de determinación del centro de la imagen, no vamos a exponer el procedimiento detallado para ajustar las curvas gaussianas, ya que se trata de un problema matemático largo de resolver y que puede encontrarse en bibliografía sobre ajuste de funciones no lineales. Sin embargo, sí se incluye la figura 4.1 donde puede apreciarse la obtención del centro buscado, a partir del ajuste de los valores numéricos registrados en los píxeles.



**Fig. 4.1** Determinación del centro luminoso de la imagen mediante el ajuste de dos curvas Gaussianas

Para el segundo método de ajuste de centroides, por tratarse de un procedimiento matemático más simple, sí se expone el siguiente ejemplo detallado. Suponemos que el objeto captado en nuestro sensor CCD ha quedado registrado en un cuadrado de 7x7 píxeles, y el valor numérico asignado a la intensidad lumínica que ha incidido en cada uno de esos 49 píxeles es el dado por la figura 4.2. Entonces, podremos emplear este método para calcular la posición horizontal y vertical del centro de la imagen. Para calcular la posición horizontal del centro de la imagen del objeto, (en el eje x), primero tendremos que hacer los productos del valor numérico de cada píxel por su distancia horizontal, en número de píxeles, desde el lado izquierdo del cuadrado de 7x7 píxeles; después habrá que sumar todos estos productos, y finalmente se dividirá el resultado entre la suma de los valores numéricos de todos los píxeles del cuadrado. Como la distancia es la misma para los píxeles en una misma columna, sacamos de todas esas sumas el factor común de esa distancia, y la multiplicamos por la suma de todos los valores de esa columna; y este

procedimiento se realiza para cada columna. Todo esto aplicado para los valores de nuestro ejemplo de la figura 4.2 sería:

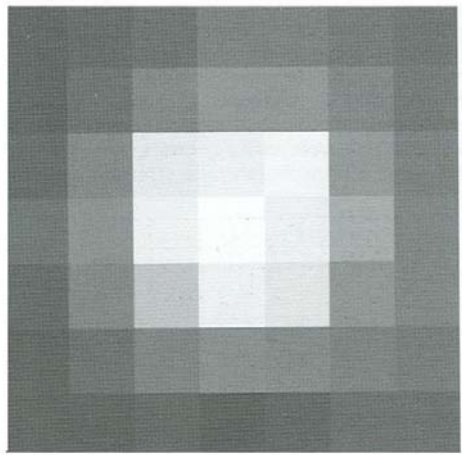
$$X_c = \frac{1 \cdot (9 + 10 + 12 + 14 + 12 + 10 + 10) + 2 \cdot (10 + 13 + \dots + 11) + \dots + 7 \cdot (13 + 19 + 24 + 24 + 21 + 17 + 14)}{9 + 10 + 12 + 14 + 12 + 10 + 10 + 10 + 13 + \dots + 11 + \dots + 13 + 19 + 24 + 24 + 21 + 17 + 14} =$$

$$= \frac{1 \cdot 77 + 2 \cdot 129 + 3 \cdot 327 + 4 \cdot 542 + 5 \cdot 425 + 6 \cdot 210 + 7 \cdot 132}{77 + 129 + 327 + 542 + 425 + 210 + 132} = \frac{7793}{1842} = 4.23 \text{ píxels}$$

con este cálculo habremos encontrado la posición horizontal, o en el eje  $x$ , del centro de la imagen. Para calcular la posición vertical del centro de la imagen, (en el eje  $y$ ), el procedimiento es análogo pero ahora multiplicando la distancia de cada fila, contada en número de píxels, desde la parte inferior del cuadrado de 7x7 píxels, por la suma de los valores de los píxels de cada fila, ya que todos están a la misma distancia de la parte inferior del cuadrado, es decir:

$$Y_c = \frac{1 \cdot (9 + 10 + 11 + 10 + 12 + 13 + 13) + 2 \cdot (10 + 13 + \dots + 19) + \dots + 7 \cdot (10 + 11 + 13 + 20 + 20 + 17 + 14)}{9 + 10 + 11 + 10 + 12 + 13 + 13 + 10 + 13 + \dots + 19 + \dots + 10 + 11 + 13 + 20 + 20 + 17 + 14} =$$

$$= \frac{1 \cdot 78 + 2 \cdot 142 + 3 \cdot 336 + 4 \cdot 559 + 5 \cdot 456 + 6 \cdot 166 + 7 \cdot 105}{78 + 142 + 336 + 559 + 456 + 166 + 105} = \frac{7617}{1842} = 4.14 \text{ píxels}$$



7	10	11	13	20	20	17	14
6	10	13	24	39	38	25	17
5	12	26	85	152	116	44	21
4	14	32	108	190	139	52	24
3	12	24	64	101	73	38	24
2	10	13	22	30	27	21	19
1	9	10	11	10	12	13	13
	1	2	3	4	5	6	7

**Fig. 4.2** Determinación del centro luminoso de la imagen mediante una media ponderada de las luminosidades de todos sus píxels

La fórmula general de los cálculos realizados para hallar las posiciones en los ejes  $x$  e  $y$  del centro de la imagen del objeto, sería la siguiente, siendo  $I_{ij}$  los valores numéricos proporcionales a la intensidad lumínica registrada en cada píxel.

$$X_c = \frac{\sum_i \left( x_i \left( \sum_j I_{ji} \right) \right)}{\sum_i \sum_j I_{ij}} ; \quad Y_c = \frac{\sum_i \left( y_i \left( \sum_j I_{ij} \right) \right)}{\sum_i \sum_j I_{ij}}$$

Luego la posición del centro de la imagen según los cálculos que hemos realizado estaría a 4.23 píxels del lado izquierdo del cuadrado considerado, ( $X_c = 4.23$  píxels), y a 4.14 píxels del lado inferior, ( $Y_c = 4.14$  píxels). Para comparar estos resultados podemos ver en la figura 4.2, que si hubiésemos considerado como centro de la imagen simplemente el píxel con mayor iluminación, la posición del centro hubiese sido  $X_c = 4$  píxels,  $Y_c = 4$  píxels, ya que se puede apreciar tanto en el valor numérico registrado como en la imagen, que este es el píxel más iluminado. Por otra parte, si hubiésemos empleado el método de ajuste de gaussianas el centro habría quedado determinado en  $X_c = 4.22$  píxels,  $Y_c = 4.19$  píxels.

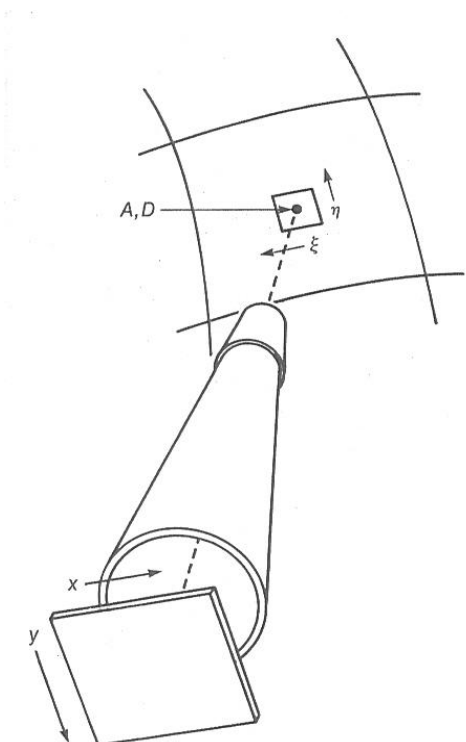
#### 4.4. Obtención de las coordenadas celestes

En el apartado anterior, hemos visto cómo obtener las coordenadas rectangulares ( $X_c$ ,  $Y_c$ ) del centro de la imagen del objeto celeste captado; ahora estas coordenadas medidas con precisión sobre la imagen, tendrán que dar lugar a las coordenadas del objeto ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) en la esfera celeste. Obtener estas coordenadas celestes no es trivial, pero en los siguientes subapartados se explican todos los pasos necesarios para llegar a calcularlas. Estos pasos se ven con detalle, pues el objetivo principal del trabajo es justificar que el sistema de determinación de la posición de la sonda espacial, tiene una base sólida para funcionar. Una vez hecha la justificación de los pasos, se propondrá un programa que llevará a cabo todos los cálculos, y con el que resultará muy rápido pasar de las medidas hechas sobre la imagen captada por la CCD, a las coordenadas celestes del objeto que nos interese, en nuestro caso asteroides o planetas del Sistema Solar vistos desde la sonda espacial.

Para obtener las coordenadas celestes ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) de un objeto, a partir de su posición ( $X_c$ ,  $Y_c$ ) medida sobre una imagen captada, necesitamos primero definir las llamadas coordenadas estándar ( $\xi$ ,  $\eta$ ) representadas en figura 4.3. Para definir las, tomamos el punto de la esfera celeste donde apunta el eje óptico de nuestro sistema de captación de imágenes, y proyectamos la porción de esfera celeste alrededor de ese punto, sobre un área plana tangente a ese mismo punto. Entonces, sobre este trozo “aplanado” del cielo obtendremos la posición del cuerpo celeste en las llamadas coordenadas rectangulares estándar ( $\xi$ ,  $\eta$ ). Estas coordenadas nos servirán como puente entre las coordenadas ( $X_c$ ,  $Y_c$ ) medidas, y las coordenadas celestes del objeto ( $\alpha$ ,  $\delta$ ). Encontraremos por un lado las relaciones entre las coordenadas estándar y las celestes, y por otro lado las relaciones entre las coordenadas estándar y las medidas en la imagen.



En el texto que sigue se buscarán estas relaciones mencionadas, por lo que nos referiremos repetidamente a tres sistemas de coordenadas para un mismo objeto celeste; las coordenadas medidas sobre la imagen captada del objeto ( $X_c, Y_c$ ) también referidas como  $(x, y)$ , las coordenadas estándar sobre el plano tangente  $(\xi, \eta)$ , y las coordenadas celestes de ascensión recta y declinación  $(\alpha, \delta)$ . En el subapartado 4.4.3. se introducen además unas cuartas coordenadas  $(\xi'', \eta'')$  que como se verá tendrán también un papel importante.



**Fig. 4.3** Coordenadas  $(x, y)$  sobre el sensor CCD, y coordenadas  $(\xi, \eta)$  sobre el plano tangente. A y D son los ángulos de ascensión recta y declinación del punto en la esfera celeste donde llega la prolongación del eje óptico

#### 4.4.1. Relación entre coordenadas $(x, y)$ , y $(\xi, \eta)$

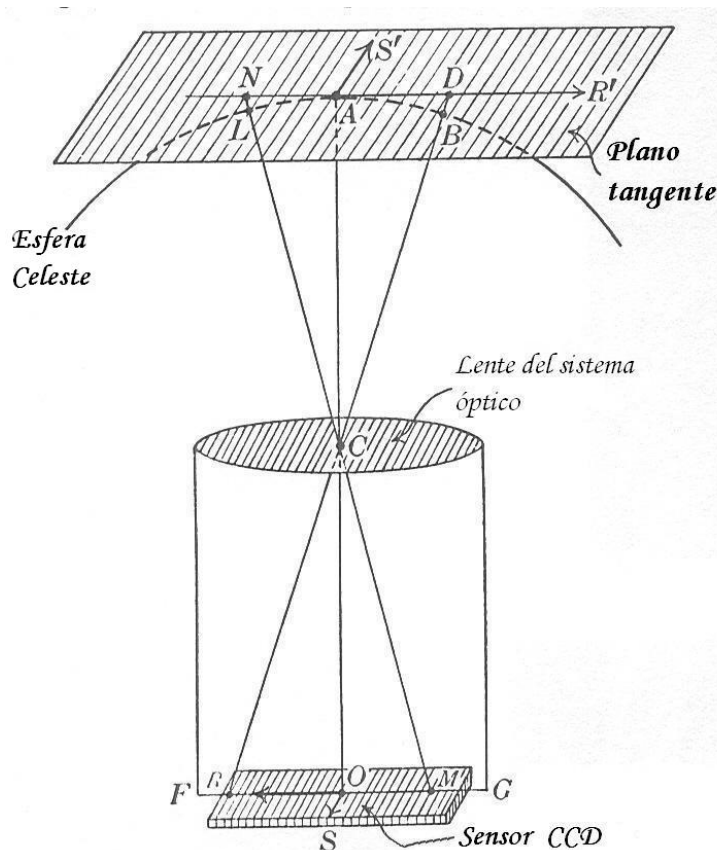
Lo primero que se va a ver es cómo se relacionan la proyección de la porción de esfera celeste sobre el plano tangente, con la imagen captada por el sensor CCD de esa misma porción de esfera celeste, es decir, la relación entre las coordenadas estándar  $(\xi, \eta)$ , y las coordenadas  $(X_c, Y_c)$  del objeto que nos interese.

En la figura 4.4 se representan el sensor CCD, y el plano tangente a una parte de la esfera celeste. La recta CO es el eje óptico del sistema, y su prolongación llega hasta el punto A de la esfera celeste; el plano tangente lo es a este punto A, y este plano y el del sensor CCD son paralelos. Si los puntos B y L son objetos celestes, sus imágenes se formarán en los puntos R y M del

sensor, y sus proyecciones sobre el plano tangente serán los puntos D y N respectivamente. Entonces de la figura se puede deducir por similitud de triángulos, la siguiente relación; si  $\phi$  es el ángulo formado por las rectas CO y CM, éste será igual al ángulo formado por las rectas CA y CL, y por tanto,

$$\tan \phi = \frac{OM}{OC} = \frac{AN}{AC}$$

donde OM es una distancia medida sobre el sensor CCD, como podría ser  $X_c$  o  $Y_c$ , y AN es una distancia medida sobre el plano tangente, como  $\xi$  o  $\eta$ . O sea, que se puede deducir que el conjunto de cuerpos celestes registrados por la CCD refleja al conjunto de estos mismos cuerpos celestes proyectados sobre el plano tangente, aunque a una escala diferente. Por tanto, las coordenadas ( $X_c$ ,  $Y_c$ ) medidas sobre el plano de la imagen captada, (a partir de ahora se llamarán  $(x, y)$  para facilitar la notación), se relacionarán con las coordenadas estándar  $(\xi, \eta)$  medidas sobre el plano tangente con las expresiones 4.1 dadas más abajo.



**Fig. 4.4** Relación entre la posición de los objetos en la esfera celeste con su posición en el plano tangente y en el plano del sensor CCD

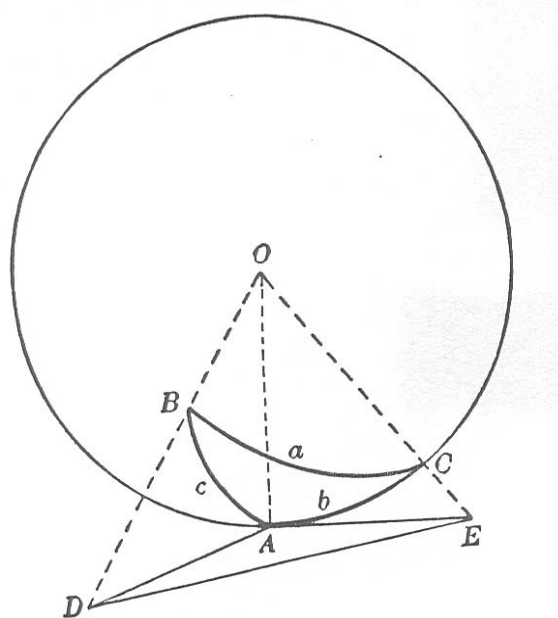
$$\frac{\xi}{AC} = \frac{x}{OC} ; \quad \frac{\eta}{AC} = \frac{y}{OC} \quad (4.1)$$

Vista la relación entre las coordenadas estándar  $(\xi, \eta)$ , y las coordenadas  $(x, y)$  del objeto celeste, veremos ahora la relación entre las coordenadas estándar  $(\xi, \eta)$ , y las coordenadas celestes  $(\alpha, \delta)$ . Como las coordenadas celestes de ascensión recta y declinación  $(\alpha, \delta)$ , están definidas sobre la esfera celeste vamos primero a definir algunos conceptos y relaciones pertenecientes a la llamada trigonometría esférica que nos harán falta.

#### 4.4.2. Conceptos de trigonometría esférica

La trigonometría esférica estudia esencialmente las direcciones hacia las cuales se observan los objetos celestes, y define estas direcciones como si los objetos estuvieran pegados sobre la imaginaria esfera celeste, sin tener en cuenta las distancias tan distintas a las que se encuentran dichos objetos. Esta visión basada en la geometría de una esfera, resulta ser de gran interés práctico para estudiar y entender los movimientos de los astros que observamos en el cielo.

Si consideramos una esfera y hacemos que un plano la corte pasando por su centro, la intersección del plano con la esfera define un círculo máximo. Visto esto, se puede definir un triángulo esférico como el área encerrada por tres círculos máximos, un ejemplo se representa en la figura 4.5:



**Fig. 4.5** Definición de un triángulo esférico

En el triángulo esférico representado en la figura 4.5, se puede ver la proyección de éste sobre un plano tangente a la esfera en el punto A. Se define como ángulo esférico, que llamaremos A, al formado entre los lados b y c de la figura, y tendrá un valor igual al del ángulo formado por las proyecciones de estos lados b y c sobre el plano tangente; es decir, el ángulo esférico A tendrá por definición, el valor del ángulo plano formado por los lados AD y AE del triángulo plano representado en la figura. De forma análoga se definirán los ángulos esféricos que llamaremos B y C, proyectando sobre planos tangentes a la esfera en los puntos B y C respectivamente. Los lados del triángulo esférico dibujado, a, b, y c, serán arcos de círculos máximos, y por tanto tendrán una longitud igual al producto del radio de la esfera por el ángulo en radianes subtendido por los propios lados a, b, y c. Por ejemplo, el lado a será igual al producto del radio de la esfera, por el ángulo en radianes formado por las rectas OB y OC, siendo O el centro de la esfera. Como el radio de la esfera es constante, y lo que nos interesa son las posiciones sobre la superficie esférica, damos al radio el valor 1, y entonces el valor de la longitud de los lados del triángulo esférico será igual al ángulo subtendido desde el centro de la esfera.

Igual que en trigonometría plana, se pueden definir relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos esféricos, éstas las emplearemos en el apartado siguiente para definir las relaciones que buscamos entre coordenadas. Se dan sin justificar para no alargar innecesariamente este apartado, pero esta justificación se puede encontrar en libros que traten sobre trigonometría esférica.

Los elementos de la figura 4.5 cumplirán las siguientes relaciones entre lados y ángulos:

Fórmulas del coseno:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\end{aligned}\tag{4.2}$$

Fórmula del seno:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\tag{4.3}$$

Fórmulas análogas:

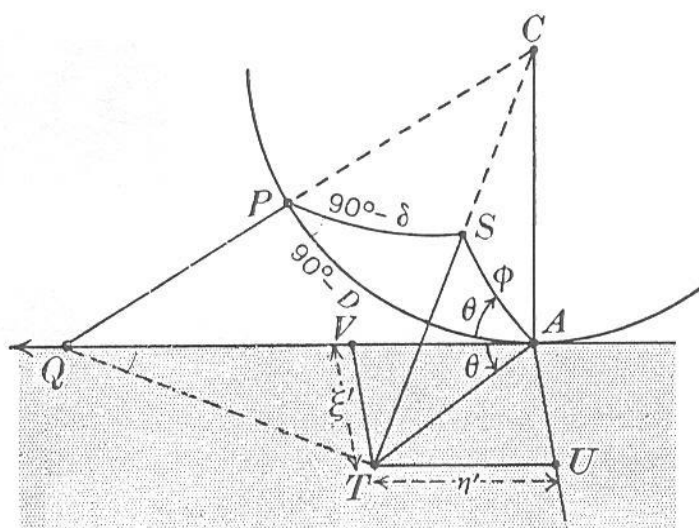
$$\begin{aligned}\sin a \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \\ \sin a \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A\end{aligned}\tag{4.4}$$

#### 4.4.3. Relación entre coordenadas $(\alpha, \delta)$ , $(\xi, \eta)$ , y $(\xi'', \eta'')$

Una vez definidos los conceptos de plano tangente y de trigonometría esférica, ya se puede analizar la forma en que se relacionarán las coordenadas angulares celestes de ascensión recta y declinación  $(\alpha, \delta)$  de los objetos captados por el sensor CCD, con sus coordenadas estándar rectangulares sobre el plano tangente  $(\xi, \eta)$ .

En la figura 4.6 se representa el plano tangente que se había definido en la figura 4.4, pero ahora este plano está debajo del punto C de la figura, aunque tanto el punto C como el A siguen representando los puntos de corte del eje óptico con la lente, y con el plano tangente respectivamente. Se dibuja la figura en esta posición pues será más fácil ver las equivalencias con los lados y ángulos del triángulo esférico representado en la figura 4.5.

En la figura 4.6 se pueden ver los elementos que vamos a relacionar y que se describen a continuación. El punto C situado sobre la lente del sistema óptico de la sonda espacial, será el centro de la esfera celeste, y el eje de este sistema óptico estará apuntando hacia el punto A de la esfera. El punto S será el objeto celeste cuyas coordenadas queremos relacionar, y el punto T será la proyección de este objeto sobre el plano tangente, mientras que el punto P será el polo norte de la esfera celeste. La línea que une A con S será un arco de círculo máximo, y formará uno de los lados del triángulo esférico representado entre los puntos de la esfera A, S, y P; la proyección de este arco de A a S será la recta AT. Si ahora tomamos como origen de coordenadas de  $(\xi, \eta)$  el punto A, podremos determinar en la figura las coordenadas  $(\xi', \eta')$  que corresponden al punto T, o sea a la proyección del objeto celeste S sobre el plano tangente.



**Fig. 4.6** Relación entre los puntos en la esfera celeste y su proyección sobre el plano tangente

Según las definiciones dadas en el apartado sobre trigonometría esférica, en la figura 4.6 llamamos  $\phi$  al arco que forma el lado AS del triángulo esférico, este arco tiene el valor del ángulo ACT formado por las rectas CA y CT de la figura. Por otro lado, llamamos  $\theta$  al ángulo esférico formado por los lados AS y AP; este ángulo coincidirá en valor con el ángulo del triángulo plano formado por los lados AT y AQ. A partir de la figura se pueden definir las siguientes relaciones.

$$\left. \begin{aligned} VT = \xi' &= AT \sin \theta \\ UT = \eta' &= AT \cos \theta \\ \tan ACT &= \frac{AT}{AC} \Rightarrow AT = AC \tan ACT = AC \tan \phi \end{aligned} \right] \Rightarrow \left[ \begin{aligned} \frac{\xi'}{AC} &= \tan \phi \sin \theta \\ \frac{\eta'}{AC} &= \tan \phi \cos \theta \end{aligned} \right]$$

aplicando la relación 4.1 dada en el apartado 4.4.1., y como para este caso los valores de  $(\xi, \eta)$  son;  $\xi = \xi'$ , y  $\eta = \eta'$  tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{\xi'}{AC} &= \frac{\xi}{AC} = \frac{x}{OC} = \tan \phi \sin \theta \equiv \xi'' \\ \frac{\eta'}{AC} &= \frac{\eta}{AC} = \frac{y}{OC} = \tan \phi \cos \theta \equiv \eta'' \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde x e y son las coordenadas medidas sobre la imagen captada por el sensor CCD, y OC es la distancia focal del sistema óptico de captura de imágenes de la sonda espacial.

A partir de las dos relaciones 4.5 deducidas arriba se realiza la definición de unas nuevas coordenadas que llamaremos coordenadas estándar normalizadas, las cuales serán el cociente entre las coordenadas medidas sobre la imagen captada (x, y) y la distancia focal. Si x e y se miden en las mismas unidades que la distancia focal, al hacer los cocientes x/OC e y/OC nos quedarán unos valores numéricos adimensionales que son los que llamamos  $\xi''$  y  $\eta''$ , o componentes de las coordenadas estándar normalizadas. Ahora la relación que nos faltará establecer será entre  $(\xi'', \eta'')$  y  $(\alpha, \delta)$ .

Para encontrar la relación entre  $(\xi'', \eta'')$  y  $(\alpha, \delta)$ , vamos a suponer las coordenadas  $(\alpha, \delta)$  conocidas para el objeto celeste S y para el punto A de la figura 4.6. En el triángulo esférico formado entre los puntos A, S, y P, teníamos que A era el punto de la esfera celeste hacia donde apuntaba nuestra CCD; las coordenadas de ascensión recta y declinación de este punto serán conocidas y las llamaremos A y D respectivamente. El punto P era el polo norte de la esfera celeste, y por tanto según la definición de las coordenadas celestes dada en el

capítulo 2, su declinación es de  $+90^\circ$ , por todo ello, el arco entre A y P valdrá  $AP = 90 - D$ . Por otro lado, consideramos conocidas las coordenadas celestes del punto S, y las llamamos,  $\alpha$  a su ascensión recta, y  $\delta$  a su declinación, por tanto el arco entre S y P valdrá  $SP = 90 - \delta$ . Además, en este mismo triángulo esférico podemos ver que el ángulo APS formado por los lados PS y PA, será igual a la diferencia entre los valores de ascensión recta del cuerpo S y del punto A. Entonces, considerando que en la figura el punto S está al Este del punto A, es decir, que la ascensión recta de S es mayor que la de A, se puede ver que  $APS = \alpha - A$ . Por último, en la figura se define el ángulo SAP como  $\theta$ , y al arco AS como  $\phi$ . Vistos estos parámetros del triángulo esférico de la figura 4.6, podemos aplicar algunas de las fórmulas 4.2, 4.3, y 4.4 que se vieron en el apartado sobre trigonometría esférica, teniendo en cuenta las siguientes equivalencias entre los triángulos esféricos de las figuras 4.6 y 4.5 dadas en la tabla 4.1:

**Tabla 4.1** Equivalencias entre los lados y ángulos de los triángulos esféricos representados en las figuras 4.5 y 4.6

Figura 4.5	Figura 4.6
a	$\phi$
b	$90 - D$
c	$90 - \delta$
C	$\theta$
A	$\alpha - A$

entonces, aplicando la primera fórmula de las expresiones 4.2 al triángulo esférico de la figura 4.6 quedará:

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \cos(90 - D) \cdot \cos(90 - \delta) + \sin(90 - D) \cdot \sin(90 - \delta) \cdot \cos(\alpha - A) \\ \cos \phi &= \sin D \cdot \sin \delta + \cos D \cdot \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)\end{aligned}\quad (4.6)$$

y aplicando la fórmula 4.3 en la forma  $\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A$ ,

$$\begin{aligned}\sin \phi \cdot \sin \theta &= \sin(90 - \delta) \cdot \sin(\alpha - A) \\ \sin \phi \cdot \sin \theta &= \cos \delta \cdot \sin(\alpha - A)\end{aligned}\quad (4.7)$$

y por último aplicando la segunda fórmula de las expresiones 4.4:

$$\begin{aligned}\sin \phi \cdot \cos \theta &= \cos(90 - \delta) \cdot \sin(90 - D) - \sin(90 - \delta) \cdot \cos(90 - D) \cdot \cos(\alpha - A) \\ \sin \phi \cdot \cos \theta &= \sin \delta \cdot \cos D - \cos \delta \cdot \sin D \cdot \cos(\alpha - A)\end{aligned}\quad (4.8)$$

Estas fórmulas que hemos aplicado al triángulo esférico formado en la esfera celeste por los puntos A, P, y S de la figura 4.6 nos dan las relaciones entre los parámetros que consideramos conocidos  $\alpha$ ,  $\delta$ , A, D, y ahora nos quedará relacionarlos con los parámetros que queremos obtener que son  $\xi''$ , y  $\eta''$ . Para ello aplicamos la definición de estas coordenadas;

$$\frac{x}{OC} = \tan \phi \sin \theta \equiv \xi'' \Rightarrow \xi'' = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \sin \theta \quad (4.9)$$

$$\frac{y}{OC} = \tan \phi \cos \theta \equiv \eta'' \Rightarrow \eta'' = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cos \theta \quad (4.10)$$

si en la expresión 4.9 sustituimos  $\sin \phi \cdot \sin \theta$  por la expresión 4.7, y  $\cos \phi$  por la expresión 4.6, nos quedará la expresión para calcular  $\xi''$  en función de los datos conocidos:

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} \sin \theta = \xi'' = \frac{\cos \delta \cdot \sin(\alpha - A)}{\sin D \cdot \sin \delta + \cos D \cdot \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)} \quad (4.11)$$

y si ahora en la expresión 4.10 sustituimos  $\sin \phi \cdot \cos \theta$  por la expresión 4.8, y  $\cos \phi$  por la expresión 4.6 nos queda la expresión para calcular  $\eta''$  a partir de los datos conocidos:

$$\frac{\sin \phi \cdot \cos \theta}{\cos \phi} = \eta'' = \frac{\sin \delta \cdot \cos D - \cos \delta \cdot \sin D \cdot \cos(\alpha - A)}{\sin D \cdot \sin \delta + \cos D \cdot \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)} \quad (4.12)$$

Con estas dos expresiones 4.11 y 4.12, ya podremos calcular las coordenadas estándar normalizadas ( $\xi''$ ,  $\eta''$ ) de un cuerpo celeste, a partir de los valores de ascensión recta y declinación de ese cuerpo ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) y del punto A (A, D). En el caso concreto que nos interesa a nosotros el cuerpo S de coordenadas celestes conocidas será una de las estrellas de fondo captadas en la imagen del asteroide, y que usaremos como referencia para obtener la posición del asteroide, pero para eso aún hay que dar unos pasos más.

Ahora vamos a ver el caso inverso al anterior, o sea, vamos a determinar las coordenadas ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) celestes de un objeto celeste, suponiendo conocidas sus coordenadas ( $\xi''$ ,  $\eta''$ ). Para realizar este paso simplemente se tienen que



deducir las expresiones necesarias a partir de las expresiones 4.11 y 4.12 obtenidas antes para  $\xi''$  y  $\eta''$ , como se explica a continuación.

A partir de la expresión 4.12 para  $\eta''$  podemos hacer lo siguiente:

$$\eta'' = \frac{\sin \delta \cdot \cos D - \cos \delta \cdot \sin D \cdot \cos(\alpha - A)}{\sin D \cdot \sin \delta + \cos D \cdot \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)}$$

$$\eta'' \cdot \sin D \cdot \sin \delta + \eta'' \cdot \cos D \cdot \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A) = \sin \delta \cdot \cos D - \cos \delta \cdot \sin D \cdot \cos(\alpha - A)$$

y sacando factor común,  $\cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)$ , y  $\sin \delta$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)(\eta'' \cos D + \sin D) &= \sin \delta (\cos D - \eta'' \sin D) \\ \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A) &= \frac{\sin \delta (\cos D - \eta'' \sin D)}{\eta'' \cos D + \sin D} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ahora a partir de la expresión 4.11 que obtuvimos para  $\xi''$  podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} \xi'' &= \frac{\cos \delta \cdot \sin(\alpha - A)}{\sin D \cdot \sin \delta + \cos D \cdot \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)} \\ \cos \delta \cdot \sin(\alpha - A) &= \xi'' \cdot (\sin D \cdot \sin \delta + \cos D \cdot \cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

y sustituyendo en 4.14  $\cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)$  por la expresión 4.13 obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cdot \sin(\alpha - A) &= \xi'' \cdot \left( \sin D \cdot \sin \delta + \cos D \cdot \frac{\sin \delta (\cos D - \eta'' \sin D)}{\eta'' \cos D + \sin D} \right) = \\ &= \xi'' \cdot \left( \frac{\sin D \cdot \sin \delta \cdot \eta'' \cos D + \sin^2 D \cdot \sin \delta + \cos^2 D \cdot \sin \delta - \cos D \cdot \sin \delta \cdot \eta'' \sin D}{\eta'' \cos D + \sin D} \right) = \\ &= \xi'' \cdot \left( \frac{\sin \delta \cdot (\sin^2 D + \cos^2 D)}{\eta'' \cos D + \sin D} \right) \\ \cos \delta \cdot \sin(\alpha - A) &= \xi'' \cdot \left( \frac{\sin \delta}{\eta'' \cos D + \sin D} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Finalmente, si dividimos la expresión 4.15 entre la expresión 4.13, tendremos la siguiente relación que nos permitirá calcular la ascensión recta  $\alpha$  del objeto celeste a partir de sus coordenadas  $(\xi'', \eta'')$ , y de la declinación y ascensión recta  $(D, A)$  conocidas del punto A:

$$\frac{\cos \delta \cdot \sin(\alpha - A)}{\cos \delta \cdot \cos(\alpha - A)} = \left( \frac{\xi'' \cdot \sin \delta}{\eta'' \cos D + \sin D} \right) \cdot \left( \frac{\eta'' \cos D + \sin D}{\sin \delta (\cos D - \eta'' \sin D)} \right) = \frac{\xi'' \cdot \sin \delta}{\sin \delta (\cos D - \eta'' \sin D)}$$

$$\tan(\alpha - A) = \frac{\xi''}{\cos D - \eta'' \sin D} \quad (4.16)$$

Una vez conocida la ascensión recta  $\alpha$  del objeto con la expresión 4.16, podremos también hallar su declinación despejando  $\delta$  de la expresión 4.13.

$$\cos \delta \cdot \cos(\alpha - A) = \frac{\sin \delta (\cos D - \eta'' \sin D)}{\eta'' \cos D + \sin D}$$

$$\frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \tan \delta = \frac{(\cos(\alpha - A)) \cdot (\eta'' \cos D + \sin D)}{\cos D - \eta'' \sin D} \quad (4.17)$$

Por lo que hemos llegado a las expresiones 4.16 y 4.17 que nos permiten calcular las coordenadas celestes de un cuerpo, suponiendo conocidas sus coordenadas estándar normalizadas  $(\xi'', \eta'')$ , y los valores de ascensión recta y declinación del centro de la imagen  $(A, D)$ . Entonces, si conseguimos ahora averiguar las coordenadas  $(\xi'', \eta'')$  del asteroide, podríamos hallar su ascensión recta y declinación que es lo que estamos buscando, la forma de hacerlo se explica en el siguiente apartado.

## 4.5. Método de las constantes de la placa

Llegamos a este punto del capítulo conociendo la manera de determinar con precisión las coordenadas  $(x, y)$  sobre la imagen del objeto captado por el sensor CCD, así como la relación entre estas coordenadas  $(x, y)$  y las coordenadas  $(\xi, \eta)$  sobre el plano tangente; y habiendo definido  $(\xi'', \eta'')$  a partir de lo anterior, sabemos cómo hallar las coordenadas  $(\xi'', \eta'')$  de un objeto a partir de sus coordenadas celestes  $(\alpha, \delta)$ , y viceversa. Lo único que nos falta ahora para lograr nuestro objetivo, que es poder determinar las coordenadas celestes del cuerpo fotografiado, es saber cómo se pueden encontrar las coordenadas estándar  $(\xi'', \eta'')$  a partir de las  $(x, y)$  medidas sobre la imagen captada. Desafortunadamente esto no se puede hacer

directamente con la definición de las coordenadas  $(\xi'', \eta'')$ , sino que como se explica a continuación tendremos que usar el llamado método de las constantes de la placa.

La deducción trigonométrica que se ha dado para la determinación de las coordenadas estándar, es válida sólo para un caso ideal, ya que hemos supuesto varias situaciones ideales que en realidad tendrán un cierto margen de error como son: que el eje del sistema óptico pase exactamente por el origen de coordenadas tomado para las medidas hechas sobre el plano tangente, que el plano de la CCD y el eje óptico sean completamente perpendiculares, y que la distancia focal no varíe en absoluto con cambios de temperatura u otros factores mecánicos. También hemos asumido que no existen fenómenos de refracción de la luz, o de aberración, que hacen que la posición observada de un objeto celeste no coincida exactamente con su posición real en la esfera celeste, y por último hemos asumido que la determinación del centro de la imagen es perfecta. Es decir, habrá un cierto error en los parámetros utilizados para la determinación de las coordenadas estándar normalizadas por no tratarse de casos ideales. Por tanto habrá un cierto margen de error en la determinación de estas coordenadas que hará que no coincidan exactamente con las coordenadas ideales teóricas. Sin embargo se observa en la práctica, y se puede demostrar, que la desviación entre los valores determinados por las expresiones obtenidas para las coordenadas estándar, se puede caracterizar con suficiente precisión con una relación lineal; es decir, que entre los valores de las coordenadas estándar calculados con las expresiones ideales obtenidas, habrá unas diferencias que quedarán bien definidas con la siguientes relaciones lineales:

$$\xi'' - \frac{x}{OC} = ax + by + c \quad (4.18)$$

$$\eta'' - \frac{y}{OC} = a'x + b'y + c' \quad (4.19)$$

donde  $(\xi'', \eta'')$  serán las coordenadas estándar normalizadas calculadas para un objeto celeste con las expresiones 4.11 y 4.12,  $(x, y)$  serán las coordenadas medidas de ese mismo objeto sobre su imagen captada por el sensor CCD, OC será la distancia focal del sistema óptico, y  $a, b, c, a', b', c'$  serán las denominadas constantes de la placa que serán de valor pequeño y dependiente de los errores mencionados antes.

Si conseguimos conocer estas seis constantes tendremos una relación directa entre las coordenadas estándar  $(\xi'', \eta'')$ , y las coordenadas de posición en la imagen captada  $(x, y)$ , que es el paso que nos faltaba. La determinación de estas constantes de la placa se realiza resolviendo un sistema de al menos tres ecuaciones para cada coordenada  $\xi''$  y  $\eta''$ . Se precisará escoger un mínimo de tres estrellas que aparezcan en el campo de la imagen captada por el sensor CCD, cuyas coordenadas celestes  $(\alpha, \delta)$  sean conocidas; a partir de

las coordenadas celestes de estas estrellas determinaremos sus coordenadas estándar ( $\xi'', \eta''$ ) tal como se ha explicado en el apartado anterior con 4.11 y 4.12. Por otro lado, también se podrán medir las posiciones ( $x, y$ ) de estas estrellas sobre la imagen captada; por lo que si llamamos a las tres estrellas como 1, 2, y 3, podremos plantear el siguiente sistema de ecuaciones, y a partir de él calcular las constantes de la placa que buscamos:

$$\left[ \begin{array}{l} \xi_1'' - \frac{x_1}{OC} = ax_1 + by_1 + c \\ \xi_2'' - \frac{x_2}{OC} = ax_2 + by_2 + c \\ \xi_3'' - \frac{x_3}{OC} = ax_3 + by_3 + c \end{array} \right] \Rightarrow \text{Se determina } a, b, \text{ y } c$$

$$\left[ \begin{array}{l} \eta_1'' - \frac{y_1}{OC} = a'x_1 + b'y_1 + c' \\ \eta_2'' - \frac{y_2}{OC} = a'x_2 + b'y_2 + c' \\ \eta_3'' - \frac{y_3}{OC} = a'x_3 + b'y_3 + c' \end{array} \right] \Rightarrow \text{Se determina } a', b', \text{ y } c'$$

Conocidas las 6 constantes de la placa,  $a, b, c, a', b', c'$ , sólo nos quedará medir la posición ( $x, y$ ) en la imagen del objeto captado, cuyas coordenadas celestes queremos determinar, (normalmente un asteroide). Entonces con las ecuaciones 4.18 y 4.19 podremos calcular sus coordenadas estándar ( $\xi'', \eta''$ ), y a partir de éstas, con las expresiones 4.16 y 4.17 podremos calcular por fin sus coordenadas celestes ( $\alpha, \delta$ ).

En resumen, lo que hacemos para determinar las coordenadas celestes ( $\alpha, \delta$ ) del asteroide a partir de sus coordenadas ( $x, y$ ) medidas sobre la imagen captada por la CCD, es usar el llamado método de las constantes de la placa, (cuyo nombre viene de cuando se realizaban medidas astrométricas sobre placas fotográficas no muchos años atrás). Este método consiste en escoger un mínimo de tres de las estrellas de fondo, que aparezcan en la imagen captada con el asteroide, cuyas posiciones sean bien conocidas en coordenadas polares celestes de ascensión recta y declinación ( $\alpha, \delta$ ); entonces podremos calcular las coordenadas estándar normalizadas ( $\xi'', \eta''$ ) de estas estrellas, y a partir de estas coordenadas, y de las posiciones ( $x, y$ ) de estas mismas estrellas medidas sobre la imagen, podremos determinar las constantes de la placa, que nos relacionarán las coordenadas ( $x, y$ ) con las ( $\xi'', \eta''$ ). Una vez conocidas estas constantes, se podrán calcular las coordenadas ( $\xi'', \eta''$ ) del asteroide a partir de su posición en coordenadas ( $x, y$ ) medidas sobre la imagen captada, y con sus coordenadas ( $\xi'', \eta''$ ) se podrán calcular por último las coordenadas celestes ( $\alpha, \delta$ ) del asteroide.

Con lo que ya tendremos resuelto el problema de determinar la posición sobre la esfera celeste del asteroide, a partir de su imagen captada por el sensor CCD de la sonda espacial. Por tanto, podremos cuantificar con precisión cuál es la posición con que la sonda espacial ve al asteroide respecto de las estrellas fijas de fondo; y como esta posición observada dependerá del lugar en que se encuentre la sonda dentro del Sistema Solar, podremos deducir dónde se encuentra ésta. Esto se hará con los métodos que se explican en el capítulo 5.

#### **4.6. Elaboración de los cálculos**

Una vez se ha visto cómo realizar la determinación de las coordenadas celestes de ascensión recta y declinación ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) del asteroide visto desde la sonda espacial, a partir de la imagen tomada por el sensor CCD, se propone un programa para que estos cálculos puedan realizarse de forma eficiente por el software de nuestro sistema de navegación planetario.

El programa podrá realizar la determinación de las coordenadas celestes del asteroide ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) a partir de un mínimo necesario de tres estrellas con coordenadas celestes conocidas, aunque admite hasta diez y será recomendable usar el mayor número disponible para que el método alcance una mayor exactitud.

El código de este programa realizado en lenguaje Fortran, se incluye con explicaciones sobre su estructura en el anexo D, y un ejemplo de su aplicación en un caso concreto se describirá en el capítulo 6 de este trabajo.

## CAPITULO 5. CALCULO DE LA POSICION DE LA SONDA

Llegados a este punto del trabajo, hemos visto que podemos determinar la posición del asteroide en la esfera celeste a partir de una imagen captada por el sensor CCD, esta posición será la que se ve respecto de las estrellas de fondo, desde la perspectiva de la sonda espacial, y como se ha comentado anteriormente dependerá de en que punto esté la sonda cuando tomó la imagen. En este capítulo vamos a ver cómo se puede determinar la posición de la sonda espacial dentro del Sistema Solar, a partir de la posición observada del asteroide, y de su posición geocéntrica conocida, con lo que se completará el objetivo principal de este trabajo, que era fundamentar un método de determinación de la posición de la sonda usando asteroides como referencia. Se van a exponer dos métodos diferentes basados ambos en deducciones trigonométricas.

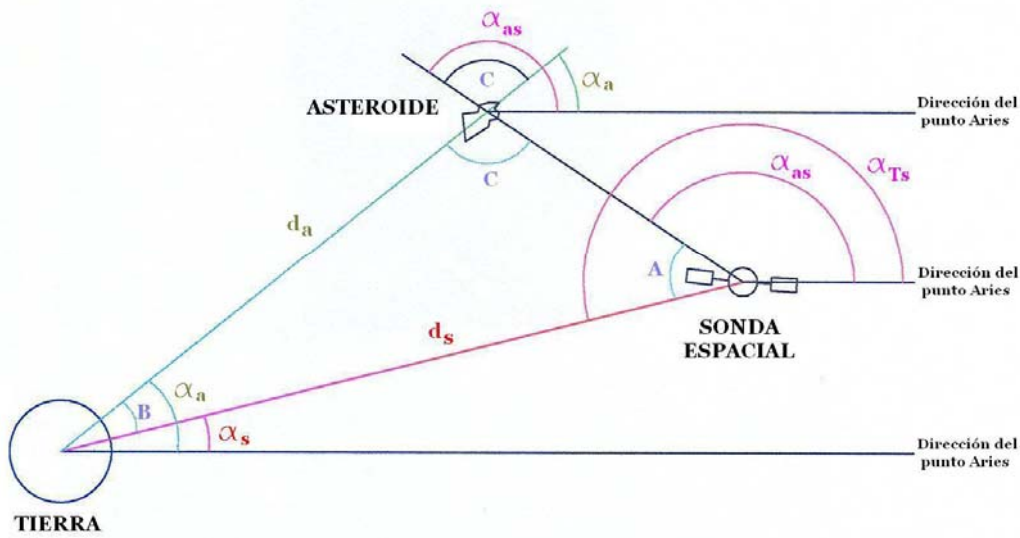
### 5.1. Método de determinación de la posición 1

Primero, vamos a ver cómo resolver el problema de la determinación de la posición sobre un espacio de dos dimensiones, como si la sonda espacial, el asteroide, y la Tierra se hallasen en un mismo plano, y más tarde generalizaremos la resolución del problema para una situación más realista en las tres dimensiones espaciales. En este método, la sonda tendrá que captar las imágenes de un asteroide y de la Tierra, para determinar sus posiciones vistas desde la sonda. Tanto para este primer método de resolución, como para el que se verá en el apartado 5.2, se van a emplear figuras para mostrar las relaciones entre los distintos parámetros de los cálculos, hay que remarcar que estas figuras sólo representarán una situación teórica y no estarán a escala con las situaciones reales.

#### 5.1.1. Problema en dos dimensiones

En la figura 5.1 se han representado los diferentes elementos que usaremos para el cálculo de la posición de la sonda en dos dimensiones. En ella, se pueden ver las posiciones relativas de la Tierra, la sonda espacial, y un asteroide. Vamos a suponer que el plano de la figura es el plano ecuatorial celeste, y que las tres rectas horizontales dibujadas señalan hacia el punto Aries. En estas condiciones, todos los ángulos medidos desde estas tres rectas serán ángulos de ascensión recta. El ángulo  $\alpha_a$  será el de ascensión recta geocéntrica del asteroide, y  $d_a$  será su distancia también geocéntrica; tanto  $d_a$  como  $\alpha_a$  tendrán valores conocidos, ya que el asteroide que usemos como guía deberá poseer una órbita bien determinada y conocida, y por tanto conociendo el momento en que la sonda haya capturado la imagen, se podrá calcular  $d_a$  y  $\alpha_a$ . Otros dos valores conocidos serán los de los ángulos de ascensión recta del asteroide y de la Tierra medidos desde la propia sonda, los cuales habrán sido obtenidos a partir de la imagen captada, como se ha explicado en el capítulo anterior. Estos ángulos se representan en la figura en color magenta y con los nombres  $\alpha_{as}$  y  $\alpha_{Ts}$ . En el dibujo del asteroide de la figura, se han

representado tres ángulos, dos de ellos como puede verse coinciden con los ya comentados  $\alpha_a$  y  $\alpha_{as}$ , y el tercero al que denominamos C, es la diferencia de los dos anteriores, ( $C = \alpha_{as} - \alpha_a$ ). Este ángulo C coincide en valor con uno de los ángulos del triángulo formado por las rectas que unen la Tierra, la sonda, y el asteroide, a los cuales hemos llamado A, B, y C. Por último se representan en rojo las magnitudes que estamos tratando de encontrar, que son la distancia de la Tierra a la sonda espacial, y su ascensión recta geocéntrica; estas dos incógnitas las hemos denominado respectivamente  $d_s$  y  $\alpha_s$  en la figura.



**Fig. 5.1** Parámetros del problema en dos dimensiones

Una vez que hemos visto en la figura 5.1 los distintos parámetros que vamos a utilizar para calcular la posición de la sonda, es decir, para calcular las incógnitas  $d_s$  y  $\alpha_s$ , vamos a ver las relaciones entre ellos. Los tres ángulos A, B, y C del triángulo formado por la Tierra, la sonda, y el asteroide pueden hallarse a partir de los datos conocidos del problema de la siguiente manera,

$$\left. \begin{array}{l} C = \alpha_{as} - \alpha_a \\ A = \alpha_{Ts} - \alpha_{as} \end{array} \right\} \Rightarrow B = 180 - A - C \quad (5.1)$$

hallados los tres ángulos A, B, y C, puesto que se conocen la distancia de la Tierra al asteroide  $d_a$  y su ascensión recta geocéntrica  $\alpha_a$ , se podrá deducir el ángulo de ascensión recta de la sonda vista desde la Tierra  $\alpha_s$ ,

$$\alpha_s = \alpha_a - B$$

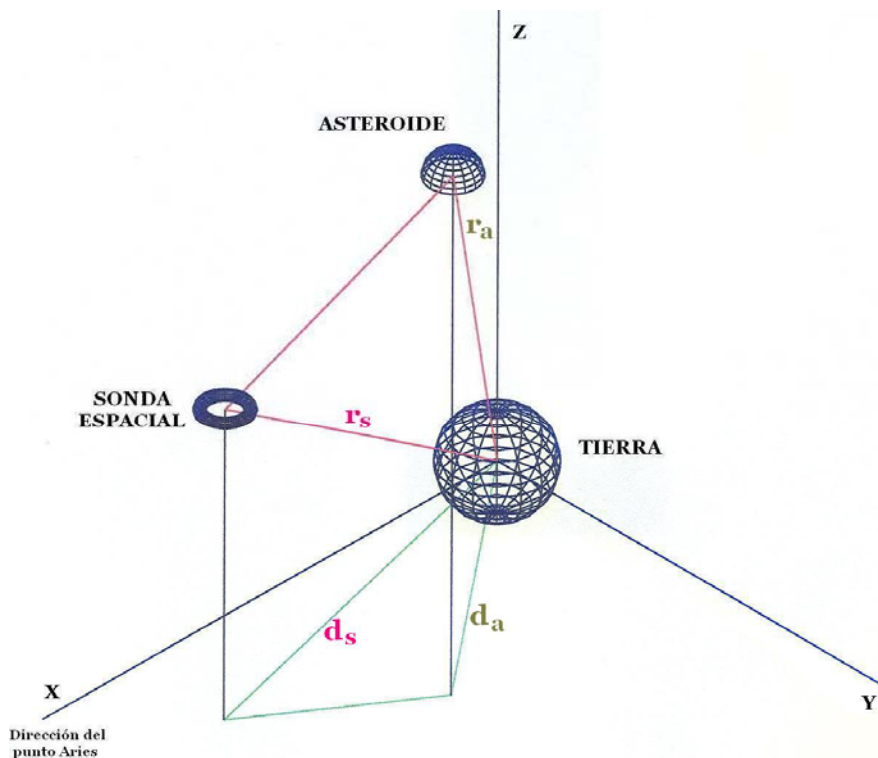
y mediante el teorema del seno se podrá calcular la distancia de la Tierra a la sonda  $d_s$ .

$$\frac{d_s}{\sin C} = \frac{d_a}{\sin A} \Rightarrow d_s = d_a \frac{\sin C}{\sin A} \quad (5.2)$$

De esta forma ya habremos determinado la posición de la sonda en dos dimensiones, pues conoceremos las incógnitas  $d_s$  y  $\alpha_s$  del problema.

### 5.1.2. Problema en tres dimensiones

Hasta aquí, hemos visto una manera de encontrar la posición geocéntrica de la sonda, a partir de la posición conocida de un asteroide, y de las medidas de las posiciones del asteroide y de la Tierra realizadas desde la sonda. Pero lo hemos hecho suponiendo el problema en sólo dos dimensiones; ahora, vamos a ver como se puede resolver el problema representado en la figura 5.2, para el caso de las tres dimensiones del espacio.

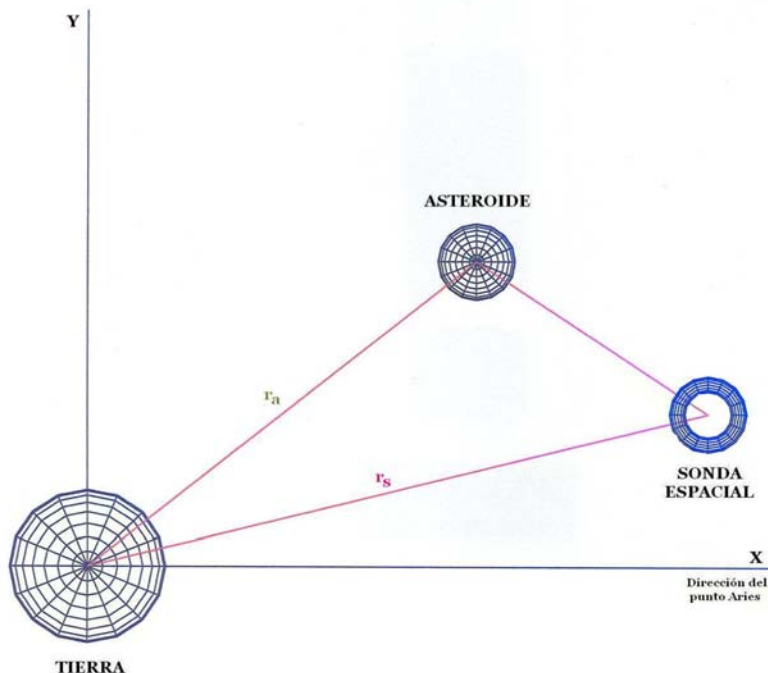


**Fig. 5.2** Representación tridimensional de las posiciones de la Tierra, el asteroide, y la sonda espacial, con su proyección sobre el plano XY



Para el problema planteado en tres dimensiones, los datos conocidos con los que contaremos serán la posición del asteroide en el momento en que la sonda capturó su imagen, es decir, su distancia a la Tierra y sus ángulos de ascensión recta y declinación geocéntricos ( $r_a$ ,  $\alpha_a$ ,  $\delta_a$ ), y también serán conocidas las posiciones de la Tierra ( $\alpha_{Ts}$ ,  $\delta_{Ts}$ ) y del asteroide ( $\alpha_{as}$ ,  $\delta_{as}$ ) vistas por la sonda. Las incógnitas serán las coordenadas geocéntricas de la posición de la sonda ( $r_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $\delta_s$ ).

En la figura 5.2 se muestran sobre unos ejes de coordenadas geocéntricas ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ): la Tierra, la sonda espacial, y el asteroide, representados respectivamente con una esfera, un toroide, y una semiesfera. Las distancias geocéntricas del asteroide y de la sonda son  $r_a$  y  $r_s$ ; y las rectas  $d_a$  y  $d_s$  son las proyecciones sobre el plano  $xy$  de  $r_a$  y  $r_s$ . Tomamos el plano  $xy$  como el del ecuador celeste, y hacemos que el eje  $x$  positivo señale hacia el punto Aries. Si ahora, observáramos el problema tridimensional de la figura 5.2 desde arriba, veríamos la figura 5.3, donde el eje  $z$  positivo saldría hacia afuera del plano del papel. En esta figura 5.3 se aprecia que el triángulo que se vería, coincidiría en forma con el dibujado en verde en la figura 5.2, y con el triángulo bidimensional de la figura 5.1, por lo que se puede intuir que vamos a poder usar la resolución hecha para el problema bidimensional, para resolver el caso en tres dimensiones, esto se ve con más detalle a continuación.



**Fig. 5.3** Vista del problema tridimensional sobre el plano XY

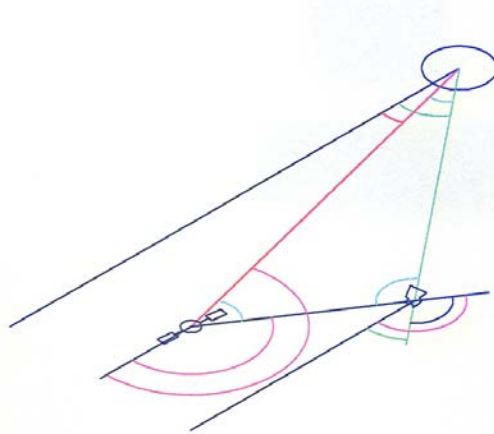
La posición geocéntrica del asteroide es conocida, y por tanto conocemos ( $r_a$ ,  $\alpha_a$ ,  $\delta_a$ ); entonces, tal como se ha representado la figura 5.2, el ángulo formado entre la recta  $r_a$  y el plano  $xy$  será el de declinación geocéntrico del asteroide  $\delta_a$ , y conocidos  $r_a$  y  $\delta_a$  podremos saber el valor del lado  $d_a$  del

triángulo de esa figura, ya que era la proyección de  $r_a$ ; sin embargo, el lado  $d_s$  del mismo triángulo, no será conocido pues no conozco ni  $r_s$  ni su declinación  $\delta_s$ . Es decir en la figura 5.2 tendremos lo siguiente:

$$\text{Conocido} \Rightarrow d_a = r_a \cdot \cos \delta_a$$

$$\text{Desconocido} \Rightarrow d_s = r_s \cdot \cos \delta_s$$

por lo que podemos ver que la proyección del problema tridimensional sobre las dos dimensiones del plano xy de las figuras 5.2 y 5.3, es equivalente al problema en dos dimensiones que teníamos resuelto; ya que  $d_a$  es uno de los datos conocidos,  $d_s$  es una de las incógnitas, y el resto de parámetros del problema bidimensional de la figura 5.1 se repetirán en la proyección del problema tridimensional de las figuras 5.2 y 5.3. La equivalencia entre las figuras anteriores se ve en la figura 5.4 donde se ha representado la proyección sobre el plano xy, se han omitido todas las letras para mayor claridad, pero estas se corresponderían con las mismas que las de la figura 5.1.



**Fig. 5.4** Proyección sobre el plano XY del problema tridimensional

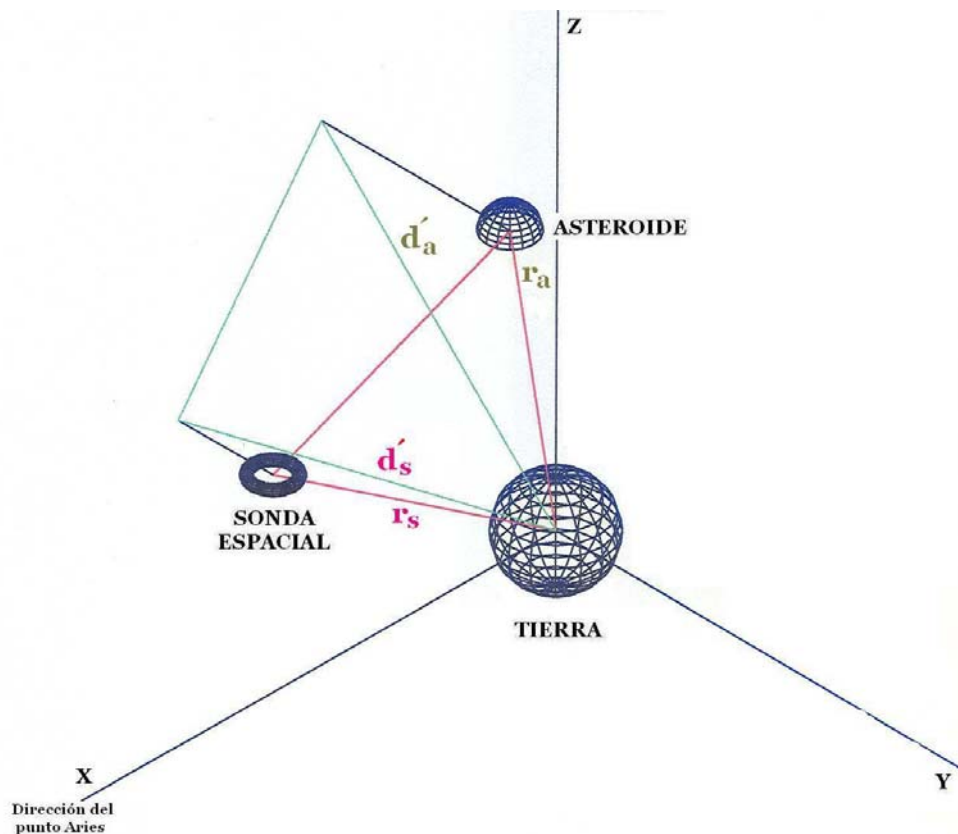
Al resolver el problema en dos dimensiones de la figura 5.4, por el mismo procedimiento que se empleó para el caso de la figura 5.1, y teniendo en cuenta que ahora  $d_a = r_a \cdot \cos \delta_a$ , podremos determinar el valor del ángulo de ascensión recta geocéntrico de la sonda  $\alpha_s$ , y un valor para  $d_s$  que ahora será  $d_s = r_s \cdot \cos \delta_s$ ; pero no se determinarán ni el ángulo de declinación geocéntrico de la sonda  $\delta_s$ , ni su distancia  $r_s$  a la Tierra, por lo que aún tendremos que hacer otro paso para determinar la posición de la sonda en tres dimensiones ( $r_s, \alpha_s, \delta_s$ ).

El siguiente paso será hacer la proyección del problema tridimensional sobre su plano xz, tal como se representa en la figura 5.5, donde la recta  $d'_a$  en el plano xz es la proyección de la recta  $r_a$ , y la recta  $d'_s$  es la proyección de  $r_s$ . En este caso el ángulo a considerar para la proyección de las rectas  $r_a$  y  $r_s$ , ya no será el de declinación como en el caso anterior, sino que será el ángulo de ascensión recta geocéntrico del asteroide y de la sonda respectivamente, con lo que para este caso tendremos que:

$$\text{Conocido} \Rightarrow d'_a = r_a \cdot \cos \alpha_a$$

$$\text{Desconocido} \Rightarrow d'_s = r_s \cdot \cos \alpha_s$$

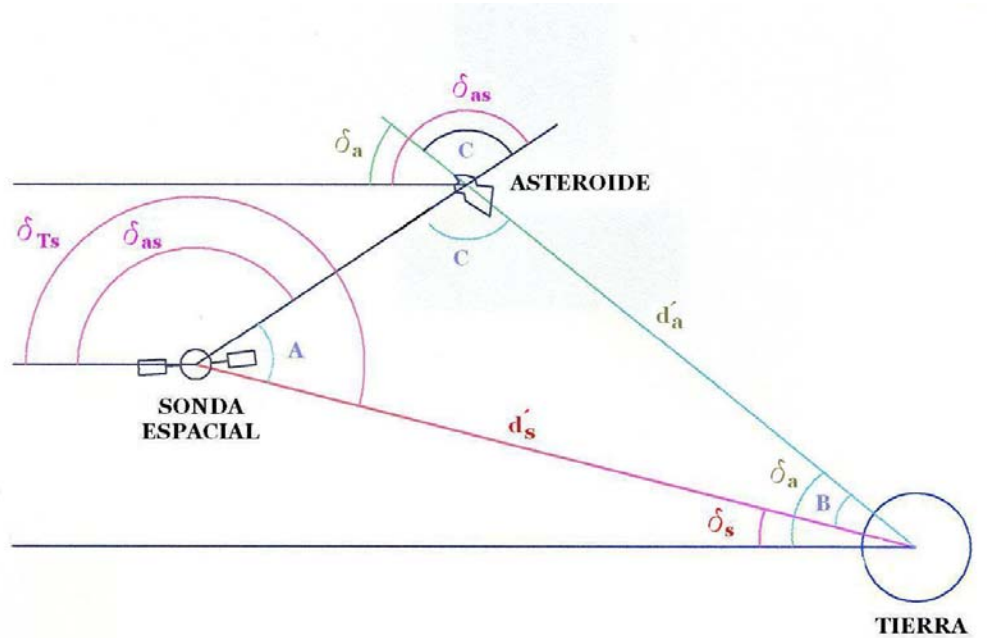
donde el lado  $d'_a$  del triángulo será conocido, ya que la distancia  $r_a$  del asteroide a la Tierra, y su ascensión recta desde la Tierra  $\alpha_a$  son valores conocidos, y el lado  $d'_s$  será desconocido, ya que aunque hemos determinado en el paso anterior la ascensión recta geocéntrica de la sonda  $\alpha_s$ , aún no conocemos su distancia desde la Tierra  $r_s$ .



**Fig. 5.5** Problema tridimensional y su proyección sobre el plano XZ

De nuevo podemos ver que tenemos una equivalencia entre el triángulo proyectado sobre el plano xz representado en la figura 5.5, y el triángulo del problema bidimensional inicial de la figura 5.1; representado esta vez con un cambio de orientación para que se ajuste a la proyección sobre el plano xz, tal como se ve en la figura 5.6. En esta figura 5.6,  $d'_a$  tendrá un valor conocido  $d'_a = r_a \cdot \cos \alpha_a$ , y las incógnitas serán  $d'_s = r_s \cdot \cos \alpha_s$ , y el ángulo de declinación geocéntrico de la sonda  $\delta_s$ . Ahora todos los valores  $\alpha$  de los ángulos de ascensión recta de la figura 5.1 serán ángulos de declinación  $\delta$ , ya que están medidos desde el plano xy que era el plano ecuatorial. Una vez resuelto el problema por el mismo procedimiento empleado para el caso bidimensional, obtendremos los valores de  $d'_s$  y  $\delta_s$ . A partir de ellos, podremos determinar  $r_s$ ,

bien con la expresión  $d'_s = r_s \cdot \cos \alpha_s$  donde  $\alpha_s$  es conocido de la resolución de la proyección sobre el plano xy, o bien usando la expresión  $d_s = r_s \cdot \cos \delta_s$  donde  $d_s$  se ha obtenido en la proyección sobre el plano xy.



**Fig. 5.6** Proyección sobre el plano XZ del problema tridimensional

Resumiendo todo el proceso realizado en este subapartado; el objetivo era averiguar los valores de  $\alpha_s$ ,  $\delta_s$ , y  $r_s$ , con los que quedaría determinada la posición de la sonda en el espacio del Sistema Solar. Entonces, a partir de la proyección del problema tridimensional sobre el plano xy calculábamos los valores de  $\alpha_s$  y  $d_s$ , donde  $d_s = r_s \cdot \cos \delta_s$ , y de la proyección sobre el plano xz calculábamos  $\delta_s$  y  $d'_s$ , donde  $d'_s = r_s \cdot \cos \alpha_s$ . Una vez determinados los valores de  $\alpha_s$ ,  $\delta_s$ ,  $d_s$ , y  $d'_s$ , podíamos hallar  $r_s$  con cualquiera de las dos expresiones de  $d_s$  o  $d'_s$  dadas en este párrafo. Con lo que finalmente obtendríamos la posición buscada de la sonda ( $r_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $\delta_s$ ).

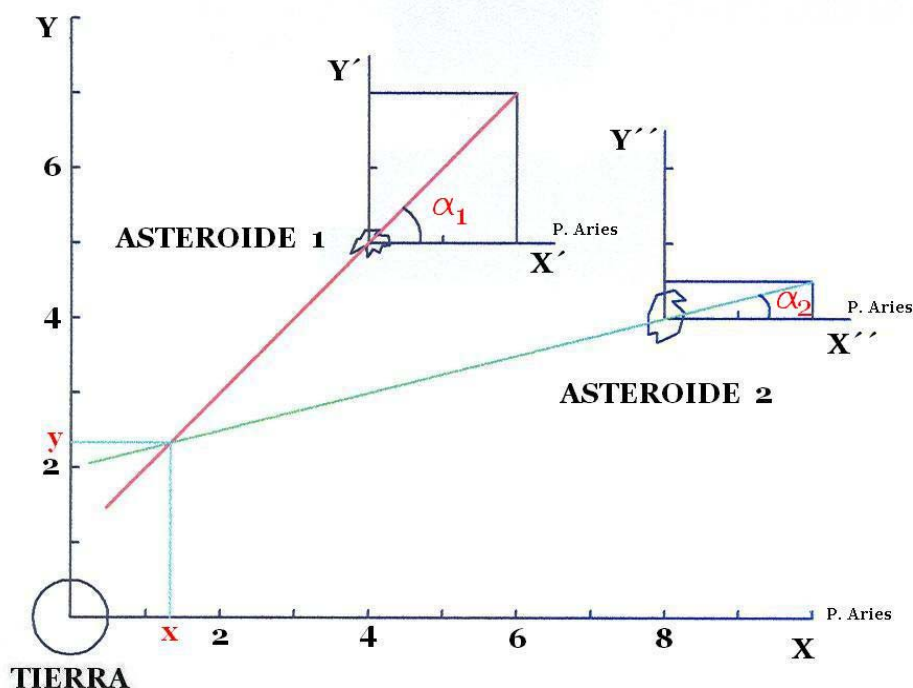
Ya hemos llegado al final de la deducción, y hemos visto que será posible calcular la distancia a la Tierra de la sonda y sus coordenadas de ascensión recta y declinación geocéntricas ( $r_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $\delta_s$ ), es decir, será posible determinar la posición de la sonda espacial en el espacio tridimensional del Sistema Solar, a partir de los valores conocidos de las coordenadas geocéntricas del asteroide en el momento de la captura de la imagen por el sensor CCD, ( $r_a$ ,  $\alpha_a$ ,  $\delta_a$ ), y a partir de los valores de ascensión recta y declinación de la Tierra y del asteroide medidos desde la sonda espacial ( $\alpha_{Ts}$ ,  $\delta_{Ts}$ ) y ( $\alpha_{as}$ ,  $\delta_{as}$ ).

## 5.2. Método de determinación de la posición 2

En este apartado, se va a plantear otra manera de realizar la determinación de la posición de la sonda espacial dentro del Sistema Solar. Esta vez se usarán más de un asteroide de referencia, y no será necesaria la observación de la Tierra, por lo que este método será más eficiente al no depender de la visión de la Tierra que no siempre será posible.

### 5.2.1. Problema en dos dimensiones

Se va a comenzar como en el caso del método anterior por resolver un problema en dos dimensiones, y luego esta solución se generalizará para tres dimensiones. El caso bidimensional se muestra en la figura 5.7, donde vamos a suponer que el plano del dibujo es el plano ecuatorial, y que los tres ejes  $x$  positivos señalan hacia el punto Aries; no se incluyen unidades en los ejes de coordenadas pues los valores tomados para el problema son arbitrarios, pero estas unidades serían de longitud.



**Fig. 5.7** Esquema del problema en dos dimensiones

Si en la figura 5.7 la sonda capta la imagen del asteroide 1, calcula su posición respecto de ella por el método explicado en el capítulo 4, y obtiene el ángulo  $\alpha_1$  de ascensión recta dibujado, querrá decir que la sonda está en algún punto de la línea roja representada en la figura, ya que sólo desde las posiciones que estén sobre esa línea será posible observar al asteroide 1 con ese ángulo  $\alpha_1$ . Para precisar en que punto concreto de esa línea se encuentra

la sonda, ésta tendrá que captar otra imagen de un segundo asteroide y calcular el ángulo  $\alpha_2$  con el que lo ve; con ello, quedará definida una segunda línea formada por las posiciones en las que es posible observar el asteroide 2 con un ángulo  $\alpha_2$ ; esta segunda línea se dibuja en verde en la figura. Luego si la sonda observa al mismo tiempo al asteroide 1 con un ángulo  $\alpha_1$  y al asteroide 2 con el ángulo  $\alpha_2$ , como esto sólo es posible que ocurra desde el punto de intersección de las rectas roja y verde de la figura, es allí donde tendrá que estar la sonda cuando capturó las imágenes.

En el razonamiento anterior, hemos asumido que era posible realizar las capturas de las dos imágenes en el mismo instante de tiempo, pero en realidad cuando se tome la imagen del segundo asteroide la sonda se habrá desplazado de la posición en la que tomó la primera imagen. Por tanto, la determinación de la posición calculada tendrá cierto margen de error que, sin embargo, no será muy importante frente a las grandes distancias de la fase de crucero de la sonda que trata este trabajo, y que se cuantificaron en el capítulo 1.

Las líneas roja y verde comentadas antes se llamarán líneas de visión de los asteroides vistos desde la sonda, y ahora habrá que determinar la posición del punto de intersección de estas dos líneas de visión de la figura 5.7. En esta figura, se representa un ejemplo numérico del método empleado; para resolverlo se utilizan tres sistemas de coordenadas rectangulares a cuyos ejes hemos llamado,  $(x, y)$ ,  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$ ; en el origen de los ejes  $(x, y)$  situamos la Tierra, y en los orígenes de  $(x', y')$ , y de  $(x'', y'')$ , ponemos respectivamente al asteroide 1 y al asteroide 2. Entonces, en los ejes  $(x', y')$  el ángulo de ascensión recta  $\alpha_1$  del asteroide 1 medido desde la sonda, definirá la inclinación de la línea de visión 1, representada por la recta roja de la figura. Quedará así definida una dirección en el plano dada por el vector unitario de coordenadas  $x'=\cos \alpha_1$ ,  $y'=\sin \alpha_1$ , en el caso concreto del ejemplo de la figura 5.7, para facilitar los cálculos hemos definido esta misma dirección con un vector no unitario de componentes  $x'=y'=2$ . En los ejes de coordenadas  $(x'', y'')$  ocurrirá lo mismo para la línea de visión del asteroide 2 representada en verde, el ángulo  $\alpha_2$  definirá la dirección dada por  $x''=\cos \alpha_2$ ,  $y''=\sin \alpha_2$  que en nuestro caso damos con el vector no unitario de coordenadas  $x''=2$ ,  $y''=0.5$ .

Una vez conocidas las direcciones de las líneas de visión de los dos asteroides, y conocidas las posiciones geocéntricas de los mismos en el momento de la captura de las imágenes, podremos encontrar las ecuaciones de las rectas roja y verde de la figura 5.7 como se explica a continuación. Conocido el ángulo  $\alpha_a$  de ascensión recta geocéntrica de un asteroide y su distancia  $r_a$  a la Tierra, sus coordenadas rectangulares en los ejes  $(x, y)$  de la figura 5.7, serán  $x=r_a \cdot \cos \alpha_a$ ,  $y=r_a \cdot \sin \alpha_a$ ; calculando estas coordenadas  $(x, y)$  para los dos asteroides de nuestro problema ejemplo, vamos a suponer que encontramos el asteroide 1 en la posición  $x=4$ ,  $y=5$ , y el asteroide 2 en el punto  $x=8$ ,  $y=4$ . Por otro lado, la línea de visión del asteroide 1 estaba definida por el ángulo  $\alpha_1$ , y también por los puntos  $(0,0)$  y  $(2,2)$  de los ejes de coordenadas  $(x', y')$ , si ahora trasladamos los valores de los puntos  $(0,0)'$  y  $(2,2)'$  del sistema de coordenadas  $(x', y')$  al sistema de coordenadas  $(x, y)$  tendremos que estos serán los puntos  $(4,5)$  y  $(6,7)$ , es decir, que la dirección de la línea de visión al

asteroide 1 quedará definida por la recta que pasa por los puntos (4,5) y (6,7) de los ejes de coordenadas (x, y). Conocidos estos valores, podemos encontrar la ecuación de la recta que define esta línea de visión, de la siguiente manera,

$$(x_1, y_1) = (4, 5)$$

$$(x_2, y_2) = (6, 7)$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 4} = \frac{7 - 5}{6 - 4} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y - 5 = x - 4$$

$$x - y + 1 = 0$$

y esta será la ecuación de la recta de visión de color rojo de la figura 5.7. Realizando el mismo proceso podremos calcular la ecuación de la recta de visión verde al asteroide 2. Si los puntos (0,0)'', y (2, 0.5)'' que definían la línea de visión al asteroide 2 en los ejes (x'', y''), los expresamos en los ejes (x, y) estos puntos serán (8,4) y (10, 4.5), por lo que la ecuación de la línea de visión que define la recta verde de la figura respecto a los ejes (x,y) será,

$$(x_1, y_1) = (8, 4)$$

$$(x_2, y_2) = (10, 4.5)$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - 8} = \frac{4.5 - 4}{10 - 8} = \frac{0.5}{2} \Rightarrow 2y - 8 = 0.5x - 4$$

$$0.5x - 2y + 4 = 0$$

y conocidas las ecuaciones de las dos rectas que definen las dos líneas de visión a los asteroides 1 y 2 sólo quedará ver donde se cruzan resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\left[ \begin{array}{l} x - y = -1 \\ 0.5x - 2y = -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} x = 1.33 \\ y = 2.33 \end{array} \right]$$

con lo que la sonda espacial se encontrará en el punto (1.33, 2.33) del sistema de coordenadas de ejes (x, y); como se puede comprobar aproximadamente en la figura 5.7 realizada a escala con las medidas dadas en el ejemplo numérico calculado. Conocida la posición de la sonda en el plano xy que era el plano del ecuador celeste, podemos expresar en coordenadas polares estos valores de la posición obtenidos en coordenadas rectangulares,

$$\alpha_s = \arctg \frac{y}{x}$$

$$r_s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

con lo que para el caso del ejemplo resuelto, tendremos un ángulo de ascensión recta geocéntrico de la sonda de  $\alpha_s = 60.28^\circ = 60^\circ 16' 53.79''$ , y una distancia de la sonda a la Tierra de  $r_s = 2.68$  (en las unidades en que estén los ejes de coordenadas, y que no hemos definido).

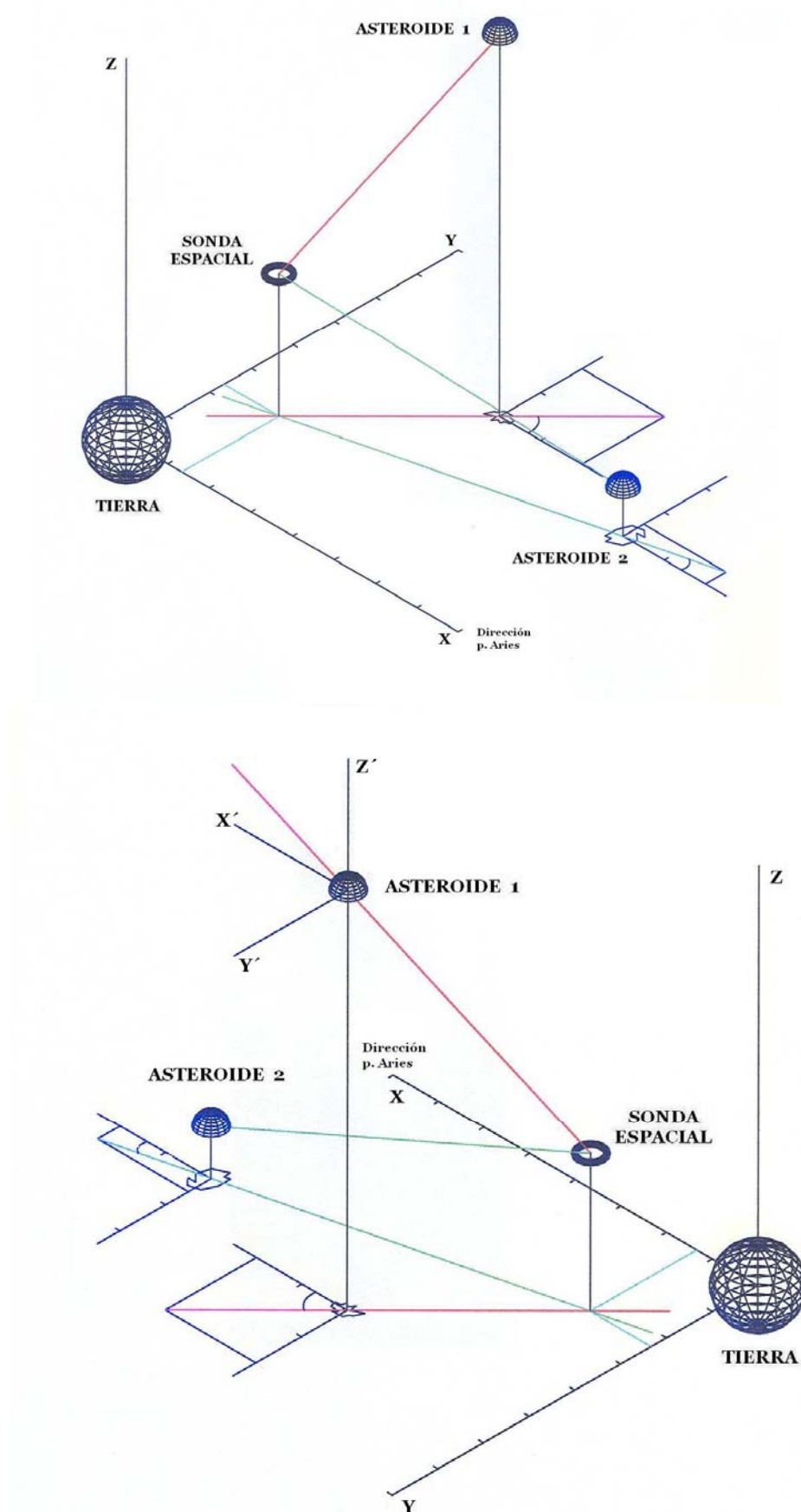
Por tanto, con el ejemplo bidimensional anterior hemos visto como se pueden determinar el ángulo de ascensión recta geocéntrica, y la distancia a la Tierra de la sonda espacial, a partir de las posiciones conocidas de dos asteroides captados por el sensor CCD de navegación de la sonda. Si además es posible observar más de dos asteroides podremos aumentar la precisión en la determinación de la posición al aumentar el número de líneas de visión, y quedar determinada la posición de la sonda, por las intersecciones de todas ellas.

### 5.2.2. Problema en tres dimensiones

Ahora vamos a generalizar el cálculo bidimensional realizado, para un caso más real en tres dimensiones. Para ello, en la figura 5.8 se han representado dos dibujos de la misma disposición de la Tierra, la sonda espacial, y los dos asteroides, del ejemplo en dos dimensiones, pero esta vez, añadiéndole la tercera dimensión en el eje z. Los dos dibujos representan el esquema del mismo problema observado desde dos perspectivas distintas, para que se vea más claramente la disposición de cada elemento. Como en el método 1 de determinación de la posición de la sonda, en la figura 5.8 se han representado los dos asteroides con dos semiesferas, la sonda espacial con un toroide, y la Tierra con una esfera en el origen de coordenadas geocéntricas de los ejes (x, y, z); los planos xy representados serían paralelos al plano ecuatorial celeste, y los ejes x positivos señalarían en la dirección del punto Aries.

Para el caso en tres dimensiones de la figura 5.8, podemos ver que ahora las líneas de visión tienen una dirección en el espacio tridimensional, y por tanto harán falta dos ángulos para que queden bien definidas, pero se seguirá cumpliendo lo que habíamos visto para el caso bidimensional; es decir, que al observar un único asteroide, y calcular sus coordenadas, la posición de la sonda quedaba acotada a las posibles posiciones a lo largo de una recta, y que observando un segundo asteroide se definía una segunda línea de visión, que al cruzarse con la anterior determinaba un único punto en el espacio donde debía encontrarse la sonda, quedando así determinada su posición.

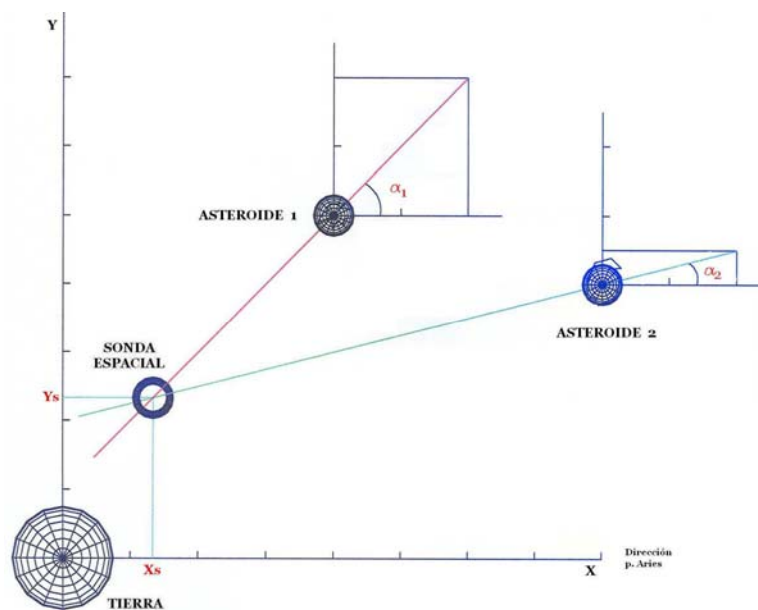




**Fig. 5.8** Dos representaciones del problema en tres dimensiones

En la figura 5.8, cuando la sonda calcule la posición de un asteroide a partir de su imagen captada por el sensor CCD, obtendrá dos ángulos, uno para su ascensión recta y otro para su declinación, tal como estos se aprecien desde la posición de la sonda. Considerando estos dos ángulos por separado, se podrá descomponer el problema tridimensional en problemas bidimensionales, y resolverlos como en el caso anterior.

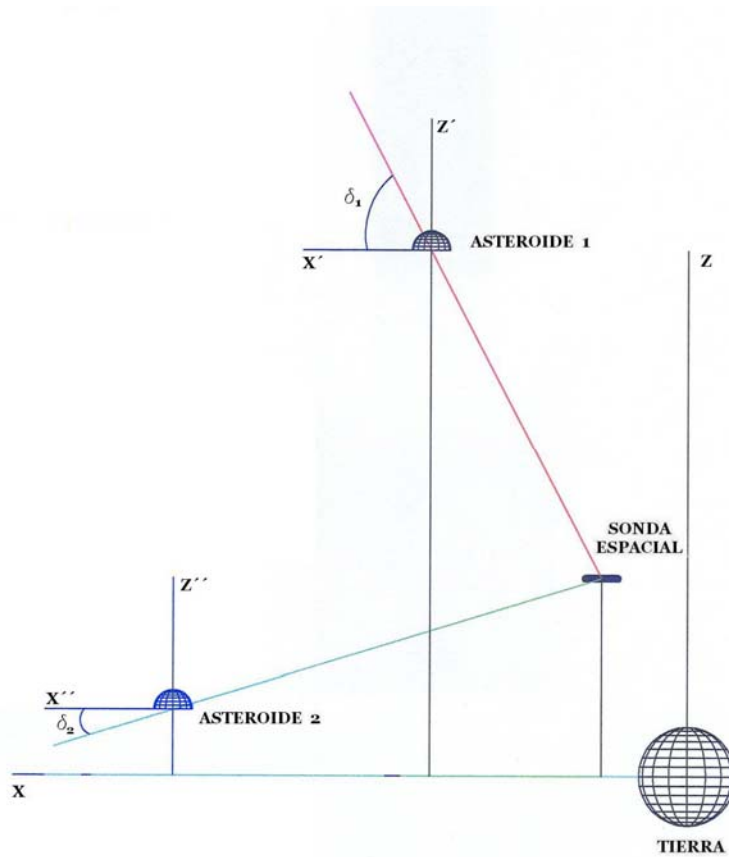
Si consideramos la proyección del problema tridimensional sobre el plano  $xy$ , obtenemos la representación de la figura 5.9, que vemos que coincide con la representación del problema bidimensional de la figura 5.7. Igual que antes los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  serán los de ascensión recta de los dos asteroides medidos desde la sonda, y como habíamos visto se podrán determinar las coordenadas  $(x_s, y_s)$  de la sonda.



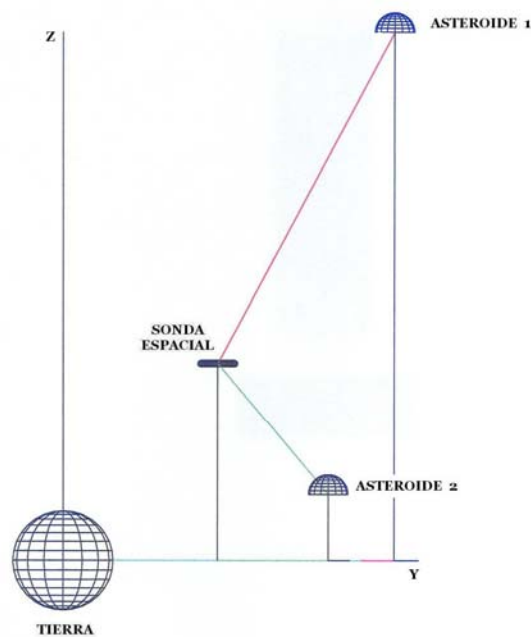
**Fig. 5.9** Proyección sobre el plano  $XY$  del problema tridimensional

Entonces, con la proyección sobre el plano  $xy$  se pueden determinar las coordenadas geocéntricas  $(x, y)$  de la posición de la sonda espacial, y ahora sólo faltará determinar su coordenada  $z$ . Para determinar esta coordenada  $z$ , podremos usar la proyección del problema tridimensional, o bien sobre el plano  $xz$ , o bien sobre el plano  $yz$ , y emplear el mismo procedimiento que en el caso bidimensional; con la diferencia de que ahora los ángulos de ascensión recta  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  deberán reemplazarse por los ángulos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  de declinación de los dos asteroides, medidos desde la posición de la sonda, tal como se ve en la figura 5.10. Además, los ejes  $y, y', y''$ , de los tres sistemas de coordenadas utilizados en el caso resuelto en dos dimensiones, serán ahora  $z, z', z''$ . Hecho esto se pueden calcular en función de la proyección utilizada, las coordenadas  $(x, z)$ , o  $(y, z)$  del punto donde se produce la intersección de las dos líneas de visión de los dos asteroides, y entonces el valor de la coordenada  $x$ , o de la coordenada  $y$ , coincidirá con el calculado sobre el plano  $xy$ , pero ahora también

determinaremos la coordenada  $z$  que nos faltaba. Las proyecciones de la figura 5.8 sobre los planos  $xz$  e  $yz$  son las representadas en las dos figuras 5.10 y 5.11.



**Fig. 5.10** Proyección sobre el plano XZ del problema tridimensional



**Fig. 5.11** Proyección sobre el plano YZ del problema tridimensional

En las figuras anteriores podremos determinar el valor de la coordenada  $z$  de la intersección de las dos líneas de visión por el mismo procedimiento con el que se solucionó el caso en dos dimensiones visto al principio de este apartado, con lo que ya habremos obtenido las tres coordenadas  $(x, y, z)$  de dicha intersección en tres dimensiones. Las coordenadas obtenidas, serán las geocéntricas rectangulares de la posición de la sonda en el espacio, para pasar estas coordenadas a las de ascensión recta y declinación geocéntricas, así como para calcular la distancia de la sonda a la Tierra, usaremos las siguientes expresiones dadas en el capítulo 2:

$$r_s = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

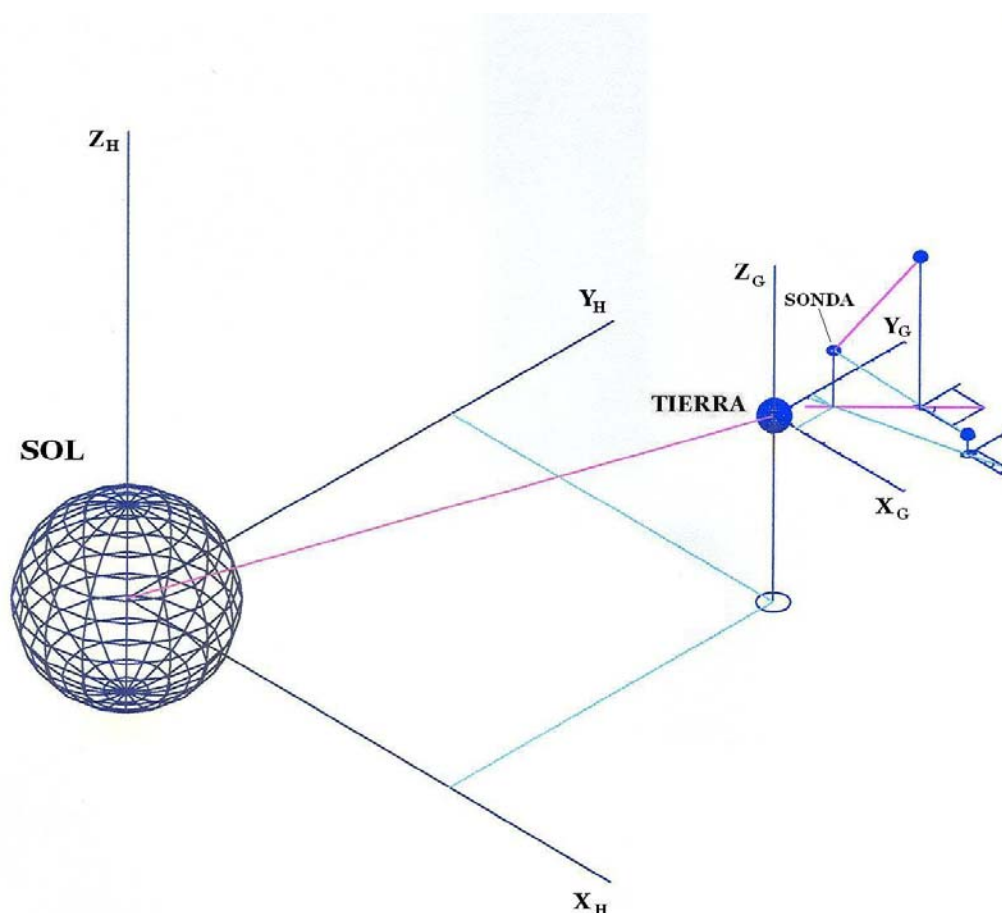
$$\alpha_s = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\delta_s = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}\right)$$

con lo que habrá quedado resuelto el problema de la determinación de la posición de la sonda espacial dentro del Sistema Solar con este segundo método, ya que habremos determinado su posición  $(r_s, \alpha_s, \delta_s)$ .

### 5.3. Posición final de la sonda espacial

Con los dos métodos vistos en los apartados anteriores, hemos explicado cómo podremos determinar la posición de la sonda espacial en el espacio tridimensional del Sistema Solar, a partir de las imágenes captadas desde la propia sonda de uno, o de dos asteroides; y a partir de las posiciones geocéntricas conocidas de estos asteroides que usamos como referencia. Estos dos métodos nos dan la posición geocéntrica de la sonda, es decir respecto del centro de la Tierra, pero la Tierra se mueve dentro del Sistema Solar, y por tanto tendremos el movimiento de la sonda por el Sistema Solar definido respecto a un sistema de referencia que también se mueve en él, por lo que para evitar la complejidad de los dos movimientos superpuestos, será conveniente referir la posición de la sonda a un sistema de coordenadas que no se mueva respecto del propio Sistema Solar. Este sistema de coordenadas será el heliocéntrico visto en el capítulo 2, que como indicaba su nombre, tenía su origen en el centro del Sol. La órbita de la Tierra en torno al Sol está bien determinada por lo que su posición en el sistema de coordenadas heliocéntrico es conocida en todo momento. Entonces, una vez calculada la posición de la sonda espacial respecto de la Tierra, y conocida la posición de la Tierra respecto del Sol, será fácil determinar la posición de la sonda respecto del Sol, como se puede ver en la figura 5.12, donde se representa un esquema con las posiciones del Sol, la Tierra, la sonda, y los mismos dos asteroides considerados en el apartado anterior.



**Fig. 5.12** Posición de la Tierra y la sonda respecto del Sol

A partir de la figura 5.12 se puede ver cómo calcular la posición heliocéntrica de la sonda espacial. Si la posición de la Tierra respecto del Sol tiene en un momento dado de tiempo coordenadas rectangulares heliocéntricas  $(x_H, y_H, z_H)$ , respecto a los tres ejes de la figura  $X_H, Y_H, Z_H$ ; y hemos calculado la posición de la sonda en ese mismo momento respecto de la Tierra, obteniendo las coordenadas rectangulares geocéntricas  $(x_G, y_G, z_G)$ , respecto a los tres ejes de la figura  $X_G, Y_G, Z_G$ , entonces la posición de la sonda respecto del centro del Sol, en coordenadas rectangulares heliocéntricas en ese mismo momento será  $(x_H+x_G, y_H+y_G, z_H+z_G)$ .

En todas las consideraciones realizadas hasta ahora, hemos supuesto que el plano de referencia utilizado era el ecuatorial, por tanto, los métodos de determinación de la posición considerados nos habrán dado la posición de la sonda en el sistema geocéntrico ecuatorial. Entonces, con lo que se ha explicado en el párrafo anterior, a partir de la posición conocida de la Tierra (dada en coordenadas heliocéntricas ecuatoriales), habremos obtenido la posición de la sonda en coordenadas heliocéntricas ecuatoriales, y ahora quedará pasar esta posición de la sonda a coordenadas heliocéntricas eclípticas, que como se dijo en el capítulo 2 eran las coordenadas más apropiadas para dar la posición final de la sonda interplanetaria. Para hacer este cambio de coordenadas, aplicamos a las tres coordenadas heliocéntricas

ecuatoriales rectangulares, obtenidas en el párrafo anterior, y que llamamos  $(x_{Ecu}, y_{Ecu}, z_{Ecu})$ , una matriz de rotación, (justificada en el anexo A), y obtenemos las coordenadas heliocéntricas eclípticas rectangulares deseadas  $(x_{Eclip}, y_{Eclip}, z_{Eclip})$ ,

$$\begin{bmatrix} x_{Eclip} \\ y_{Eclip} \\ z_{Eclip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{Ecu} \\ y_{Ecu} \\ z_{Ecu} \end{bmatrix}$$

y a partir de estas coordenadas rectangulares  $(x_{Eclip}, y_{Eclip}, z_{Eclip})$ , obtendríamos las correspondientes coordenadas polares de longitud y latitud celestes tal como se vio en el capítulo 2,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \beta &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

llegando por fin a obtener la posición de la sonda espacial dentro del Sistema Solar en coordenadas  $(r, \lambda, \beta)$ , expresadas en el sistema de referencia heliocéntrico eclíptico esférico.

## 5.4. Elaboración de los cálculos

Para el caso del procedimiento de determinación de la posición de la sonda explicado en el método 2 de este capítulo, se ha hecho un programa en lenguaje Fortran para realizar todos los cálculos necesarios, este código junto con el propuesto para el capítulo 4 formaría parte del software del sistema de navegación planetario de la sonda espacial.

El programa propuesto calculará las coordenadas de posición de la sonda en el sistema de referencia heliocéntrico eclíptico esférico, a partir de la referencia dada por cuatro asteroides que se escogerán en función de la posición estimada de la sonda en un momento dado de su trayectoria.

El código de este programa se incluye en el anexo E, y un ejemplo de su aplicación a un caso concreto se puede ver en el capítulo 6 de este trabajo.

## CAPITULO 6. RESULTADOS DE LOS CALCULOS Y CONCLUSION

En este último capítulo, se presentan los resultados obtenidos al aplicar a un ejemplo los cálculos vistos a lo largo del trabajo. Estos cálculos son realizados por dos programas, cuyo código y explicaciones se incluyen en los anexos D y E. El primer programa, calculará las coordenadas celestes ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) de un asteroide visto desde la sonda, a partir de una imagen captada por el sensor CCD, tal y como se explicó en el capítulo 4. El segundo programa, utilizará el método de las líneas de visión explicado en el capítulo 5, para calcular la posición de la sonda dentro del Sistema Solar; para ello, realizará la observación de cuatro asteroides, las posiciones de los cuales, habrán sido hipotéticamente calculadas por el primer programa. Para finalizar este capítulo, se incluye la conclusión de los cálculos realizados, y de este TFC.

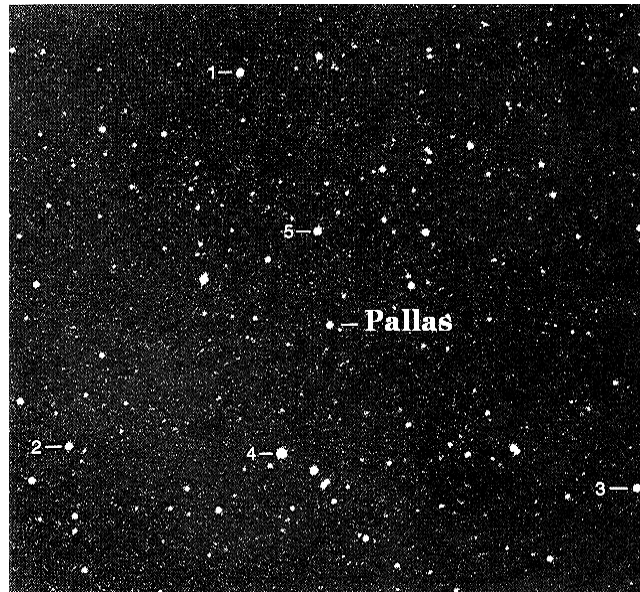
### 6.1. Cálculo de las coordenadas ( $\alpha$ , $\delta$ ) de un asteroide

Como se ha visto durante este trabajo, el primer paso para la determinación de la posición de la sonda espacial, era captar la imagen de un asteroide con el sensor CCD. A partir de esa imagen, se podían calcular cuales eran las coordenadas de ascensión recta y declinación del asteroide visto desde la sonda, respecto de las estrellas de fondo de la imagen. El procedimiento para realizar este cálculo se detalló en el capítulo 4, y ahora el programa 1 realizará todos los pasos explicados en aquel capítulo.

En este apartado, se va utilizar el programa 1 para un caso concreto dado en la referencia [27] de la bibliografía, a partir de la cual se ha elaborado el código. Se van a determinar las coordenadas ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) del asteroide Pallas, a partir de una imagen captada de éste, y de las posiciones conocidas de cinco estrellas de fondo de la imagen, la cual se muestra en la figura 6.1.

En un caso real, una vez capturada la imagen por el sensor CCD de la sonda, el software de ésta realizaría el procedimiento de ajuste de centroides explicado, y determinaría sobre la imagen, las posiciones (x, y) del asteroide, y de cinco estrellas de posición conocida por un catálogo estelar. Entonces, dicho software proporcionaría estos datos a nuestro programa, junto con otros adicionales que serían: la distancia focal del sistema óptico del sensor CCD, la época del catálogo de estrellas, los movimientos propios de las mismas, la época de la captura de la imagen, y las coordenadas celestes del centro de la imagen, estimadas a partir del mismo catálogo estelar anterior. A partir de todo ello el programa 1 realizaría el cálculo de la posición relativa del asteroide. Sin embargo, en el ejemplo que consideramos en este apartado, no tenemos el software completo de la sonda, luego todos los datos mencionados los irá pidiendo el programa por pantalla, y habrá que dárselos con el teclado.

En el ejemplo concreto que vamos a resolver, la imagen captada es la de la figura 6.1, y los datos correspondientes serán los de la tabla 6.1.



**Fig. 6.1** Imagen del asteroide Pallas con estrellas de fondo

**Tabla 6.1** Datos necesarios para el programa 1

	$\alpha$ (h, min, seg)	$\delta$ ( $^{\circ}$ , $'$ , $''$ )	Movimiento propio en $\alpha$ ( $''$ /año)	Movimiento propio en $\delta$ ( $''$ /año)	Posición imagen x (pulgada)	Posición imagen y (pulgada)
<b>Estrella 1</b>	20,02, 49.691	14,09, 38.11	+0.0009	-0.015	0.91390	1.12604
<b>Estrella 2</b>	20,03, 58.936	13,39, 13.67	-0.0001	-0.001	0.82013	0.94729
<b>Estrella 3</b>	20,00, 44.093	13,32, 00.31	-0.0006	-0.037	1.09641	0.91136
<b>Estrella 4</b>	20,02, 45.502	13,37, 15.97	+0.0047	-0.011	0.92378	0.93787
<b>Estrella 5</b>	20,02, 27.265	13,55, 47.00	+0.0008	-0.011	0.94719	1.04618
<b>Asteroide (Pallas)</b>					0.95046	0.99977
<b>Centro de la imagen</b>	20,02, 00	13,50, 00				

Además de los datos de posición de la tabla 6.1, el programa 1 nos pedirá por pantalla los siguientes datos (ver capturas de pantalla de la ejecución del programa en el anexo D):

**Longitud focal del sistema óptico del sensor CCD  $\Rightarrow$  20 pulgadas**

**Epoca del catálogo estelar o equinocio  $\Rightarrow$  1950.0**

**Epoca de la toma de la imagen  $\Rightarrow$  1988.62**

Una vez el programa tiene todos los datos anteriores, aplicará el procedimiento del capítulo 4, y calculará los valores de las 6 constantes de la placa. A partir de ellas, podrá calcular las coordenadas de ascensión recta y declinación del asteroide, tal como las vería la sonda desde su posición en el



Sistema Solar. En la figura 6.2 se muestra una captura de pantalla con las coordenadas ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) del asteroide Pallas calculadas por el programa.

```
Las coordenadas celestes del asteroide son:
ASCENSION RECTA:
Horas:          20.00000
Minutos:        2.00000
Segundos:       25.82012

DECLINACION:
Grados:         13.00000
Minutos de arco: 47.00000
Segundos de arco: 46.69561
Calculos finalizados
```

**Fig. 6.2** Coordenadas del asteroide calculadas por el programa 1

Como se ha visto, el programa 1 será capaz de determinar la posición de un asteroide respecto de las estrellas de fondo, a partir de una imagen captada desde la sonda, tal como se pretendía, y este es el primer paso necesario para calcular la posición de la sonda. En el anexo D, además del código comentado, se muestran el resto de capturas de pantalla de la ejecución completa del programa, y en el anexo C, se justifican las fórmulas empleadas para calcular las constantes de la placa, basadas en el método de los mínimos cuadrados.

## 6.2. Cálculo de la posición de la sonda espacial

Con el programa 1 hemos podido obtener las coordenadas del asteroide, u otro cuerpo, visto desde la sonda. Por tanto ahora, usando estas observaciones como referencia, será posible aplicar cualquiera de los dos métodos vistos en el capítulo 5, para determinar la posición de la sonda en el Sistema Solar. Concretamente, se ha realizado el programa 2 con el método de las líneas de visión, ya que como se comentó, este método era más eficiente al no depender de la visión de la Tierra. El código del programa 2 con comentarios sobre su funcionamiento se incluye en el anexo E, y en este apartado lo emplearemos para resolver un ejemplo.

En un caso de navegación interplanetaria real, en el instante en que se fuera a calcular la posición de la sonda, se dispondría de una estimación de su posición obtenida a partir de la propagación de su trayectoria teórica. Con esta posición estimada de la sonda, el programa 2 podría calcular las posiciones de los cuatro asteroides más cercanos a esa posición en ese momento; ya que dispondría de sus elementos orbitales en una base de datos. Entonces, la

sonda apuntaría su sensor CCD hacia cada uno de esos asteroides, y tras la captura de sus imágenes, obtendría sus coordenadas relativas por el procedimiento del apartado anterior. A partir de aquí, se aplicaría el método que vimos para obtener las líneas de visión a cada asteroide, y se calcularía en que punto del espacio se cortan; con lo que quedaría determinada la posición real de la sonda, y se podría corregir la posición estimada al principio.

El ejemplo de este apartado es una simulación de un caso real, así que le tendremos que proporcionar al programa una posición estimada de la sonda; y como no se toman unas imágenes reales, el programa nos pedirá por pantalla que le demos los valores de las coordenadas celestes de los cuatro asteroides, tal como los vería la sonda desde su posición, (los podremos obtener a partir de la posición calculada de los asteroides, y de la posición dada para la sonda).

La posición estimada de la sonda empleada para nuestro ejemplo, es la dada en la tabla 6.2, y el instante de la captura de la imagen lo vamos a tomar como el día 30 de Mayo de 2005 a las 00.00 horas solares. Con estos datos, el programa 2 calculará cuáles son los 4 asteroides más cercanos en ese momento, usando su base de datos con los elementos orbitales de 100 asteroides. Para el caso del ejemplo estos serán, Hebe, Pallas, Ceres, y Amphitrite; en la tabla 6.2 se indican las coordenadas de la posición geocéntrica de estos cuatro asteroides más cercanos a la sonda calculados por el programa 2.

**Tabla 6.2** Posiciones geocéntricas de la sonda y de los 4 asteroides

	Posición estimada sonda	Posición calculada asteroide 1 (Hebe)	Posición calculada asteroide 2 (Pallas)	Posición calculada asteroide 3 (Ceres)	Posición calculada asteroide 4 (Amphitrite)
<b>r (UA)</b>	1.5	2.19781	2.06074	1.75779	2.12022
<b><math>\alpha</math> (°)</b>	200	201.20266	183.34787	223.62609	181.23361
<b><math>\delta</math> (°)</b>	10	11.35631	20.72018	-8.70572	-4.30603
<b>x (UA)</b>	- 1.388124890	-2.00892	-1.92416	-1.25773	-2.11375
<b>y (UA)</b>	- 0.505236077	-0.77931	-0.11256	-1.19882	-0.04552
<b>z (UA)</b>	+0.260472263	0.43277	0.72910	-0.26606	-0.15919
<b>Distancia a la sonda (UA)</b>	0	0.70014	0.81311	0.88051	0.95603

Una vez el programa 2 dispone de los datos de la tabla 6.2, nos pedirá que le demos las coordenadas de cada asteroide tal como se verían desde la sonda; entonces le damos unos valores de  $\alpha$  y  $\delta$  para cada asteroide, (estos valores se muestran en una captura de pantalla en el anexo E). Hecho esto, el programa calculará la posición de la sonda espacial dentro del Sistema Solar, siguiendo el procedimiento de las líneas de visión explicado en el capítulo 5. El resultado obtenido, lo guarda en un archivo, que para el ejemplo dado, tendrá la información y el formato dados en la figura 6.3. En este archivo se incluye la posición final de la sonda en coordenadas de longitud y latitud celestes ( $r$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ):

**COORDENADAS GEOCENTRICAS RECTANGULARES:** $X_G$  (UA): -1.38838 $Y_G$  (UA): -0.50549 $Z_G$  (UA): 0.26060**COORDENADAS GEOCENTRICAS ESFERICAS:** $r_G$  (UA): 1.50034

AR (grados): 200.00583 = 13h 20' 1.40''

DEC (grados): 10.00255

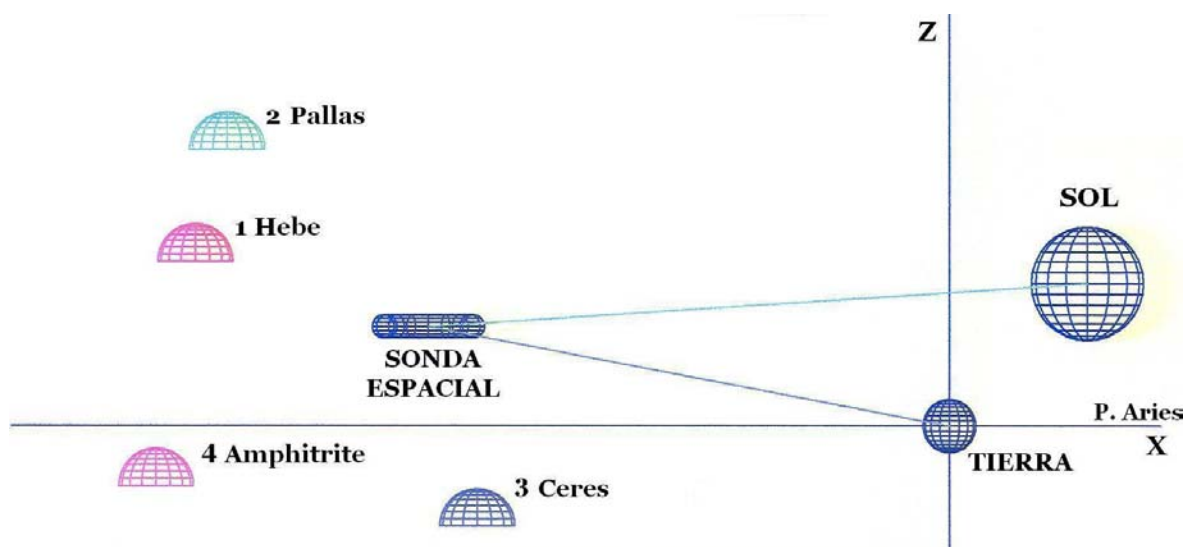
**COORDENADAS HELIOCENTRICAS ESFERICAS:** $r_H$  (UA): 2.23186

Longitud (grados): 216.60155

Latitud (grados): 11.37452

**Fig. 6.3** Archivo calculado por el programa 2 con la posición final de la sonda espacial

En la figura 6.4, se representa la posición estimada que hemos tomado para la sonda, y la calculada de los 4 asteroides, con los valores de posición dados en la tabla 6.2; también se representan con dos rectas, las distancias geocéntrica y heliocéntrica de la sonda. El eje  $y$  positivo iría hacia dentro del plano del papel, y como ya es habitual en este trabajo, la sonda se presenta como un toroide y los asteroides como semiesferas (se puede apreciar que aunque las distancias de la figura están a escala con las dadas para este ejemplo, no lo están las dimensiones de los asteroides, la sonda, la Tierra, y el Sol).

**Fig. 6.4** Posiciones de la sonda, la Tierra, el Sol, y los 4 asteroides empleados

Como podemos ver, los resultados de la figura 6.3 calculados por el programa 2, coinciden con lo esperado, ya que las coordenadas geocéntricas rectangulares y esféricas obtenidas, se aproximan a las iniciales estimadas para la sonda. Con lo que una vez realizada esta determinación de la posición real de la sonda, podríamos corregir la posición inicial estimada para la misma, y realizar las correcciones oportunas de trayectoria con el sistema de propulsión de la nave.

Por tanto, hemos llegado al final de este ejemplo, y hemos visto que el programa 2 será capaz de determinar la posición de la sonda dentro del Sistema Solar, a partir de la observación de asteroides de posición conocida, a los cuales se les habrá tomado una imagen, y aplicado el programa 1 para calcular su posición relativa. Con este resultado, quedaría comprobada la validez del método de determinación de la posición de la sonda espacial estudiado en este TFC.

En el anexo E, se incluyen además de la figura 6.3, dos representaciones más de las posiciones relativas de la Tierra, el Sol, y los 4 asteroides de este ejemplo. En el mismo anexo, se dan también más detalles del programa, como su código con explicaciones, y el contenido de los archivos empleados.

### 6.3. Conclusión

Al aplicar los dos programas anteriores a los dos ejemplos resueltos, hemos visto que siguiendo el proceso de cálculo estudiado a lo largo de este trabajo, es viable la determinación de la posición de la sonda espacial, usando asteroides como referencia. Este era el objetivo principal de este TFC, y por tanto, podemos decir que este objetivo se ha alcanzado.

Para llegar hasta aquí, ha sido necesario definir y utilizar una serie de conceptos de astronomía de posición y del Sistema Solar, estudiar el funcionamiento de los sensores CCD, y especificar unos métodos fundamentados, que nos permitieran realizar los sucesivos pasos para llegar hasta el cálculo de la posición de la sonda espacial.

El sistema de determinación de la posición que ha quedado fundamentado, se adapta bien al concepto de una misión de exploración planetaria de bajo coste, como las que están llevando a cabo en la actualidad las distintas agencias espaciales; ya que no requiere de una tecnología muy avanzada de elevado precio. Además, con un sistema relativamente sencillo como este, se podría realizar una navegación óptica autónoma durante gran parte de la duración de la misión, por lo que en lo referido a navegación, el uso de las antenas de la DSN referidas en la introducción, quedaría restringido a momentos críticos de la trayectoria, o a comprobaciones periódicas de la misma, lo cual también supondría un recorte importante en el coste global de la misión.

El proceso que hemos estudiado, es igualmente válido usando otros cuerpos de órbita conocida como los planetas, pero el escaso número de éstos limitaría enormemente el uso del sistema. Sin embargo, en el Sistema Solar existen una gran cantidad de asteroides cuyas órbitas están bien determinadas, y esto supone una gran oportunidad para la aplicación efectiva de un sistema como el tratado en este trabajo.

El uso de nuestro sistema de posicionamiento, sería válido primordialmente durante la fase de crucero de la sonda, debido a que no tendría suficiente precisión para otras fases de la misión, como la de aproximación final a un cuerpo del Sistema Solar, donde podrían utilizarse otros algoritmos basados en navegación óptica. Sin embargo, una parte importante de la duración de una misión planetaria corresponde a la fase de crucero, lo que significa que el sistema estudiado tendría un buen rendimiento para la navegación global de la misión, ya que el tiempo de crucero es del orden de meses para misiones en el Sistema Solar interior, y de años en el Sistema Solar exterior.

En la actualidad, se han experimentado sistemas de navegación óptica en misiones reales, como la de la sonda Deep Space 1 de la NASA, o la misión lunar de la sonda SMART 1 de la ESA. Aunque no tenemos información detallada, para saber si la implementación que se ha realizado en esas misiones se parece a la que hemos propuesto nosotros, la simplicidad, efectividad, y el bajo coste de estos sistemas, hace previsible que su utilización se vaya incrementando en los próximos años. En un futuro cercano, sistemas de navegación interplanetaria, basados en la observación de cuerpos del Sistema Solar, como los asteroides, podrían convertirse en una alternativa viable y económica, a los actuales sistemas de navegación, totalmente dependientes de la Tierra. Por tanto, es muy probable que dentro de algún tiempo sistemas análogos al estudiado en este TFC sean elementos imprescindibles para la navegación de las sondas espaciales por el Sistema Solar.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Roy A. E., *Orbital Motion*, Adam Hilger Ltd., Bristol, 1982.
- [2] Bate R., *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover, 1971.
- [3] Fortescue P. W., Stark J., Swinerd G. *Spacecraft Systems Engineering*, Wiley, Sussex, 2003.
- [4] Koelle H., *Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [5] Silvestry G., Broglio L., *El Gran Libro de la Astronáutica*, Hyma, Barcelona, 1987.
- [6] Smart W. M., *Textbook on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [7] Karttunen H., Kröger P., *Fundamental Astronomy*, Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [8] Encarnaz T., Bibring J., *The Solar System*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [9] Gil F. J., *Teoría de Eclipses, Ocultaciones, y Tránsitos*, Universidad de Alicante
- [10] Martinez P., Klotz A., *A Practical Guide to CCD Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [11] Galadi D., Ribas I., *Manual Práctico de Astronomía con CCD*, Omega, Barcelona, 1998.
- [12] Paniagua J. C., *Introducció a la Programació per a Químics*, Universitat de Barcelona, 1994.
- [13] Taylor J. R., *Introduction to Error Analysis*, University Science Books, 1996.
- [14] Kayton M., *Navigation Land, Sea, Air, and Space*, IEEE Press, New York, 1990.
- [15] Newberry M. V., "The Signal to Noise Connection", *CCD Astronomy*, Summer, Fall 1994.
- [16] Craig D., "Charge-Coupled Devices in Astronomy", *Annual Reviews Astronomy and Astrophysics* 24, 255-83, 1986.
- [17] Meyer E., Raab H., "CCD Astrometry", *CCD Astronomy*, Winter 1995.

- [18] Cicco D., "Measuring the Sky with CCDs", *Sky and Telescope*, Diciembre 1997.
- [19] López A., Pacheco R., "Búsqueda y Seguimiento de Asteroides con CCD", *Tribuna de Astronomía* 144, Noviembre 1997.
- [20] Riedel J. E., Bhaskaran S., "Autonomous Optical Navigation DS1 Technology Validation Report", Jet Propulsion Laboratory, Pasadena.
- [21] Scheerres D. J., Williams B.G., "Navigation for Low-Cost Missions to Small Solar System Bodies", *Acta Astronautica* Vol. 35 211-220, 1995.
- [22] Wesley T., Huntress J. R., "Missions to Comets and Asteroids", *Space Science Reviews* Vol. 90 329-340, 1999.
- [23] Yeomans D. K., Chodas P. W., "Targeting an Asteroid: The Galileo Spacecraft's Encounter with 951 Gaspra", *The Astronomical Journal* Vol. 105 1547-1552, 1993.
- [24] Konopliv A. S., Yeomans D. K., "The NEAR Radio Science Investigations", *Journal of Geophysical Research* Vol. 102 23775-80, 1997
- [25] Asphaug E., "Planetas en Miniatura", *Investigación y Ciencia*, Julio 2000.
- [26] Melbourne W. G., "Navigation between the Planets", *Scientific American*, Junio 1976.
- [27] Sinnott R. W., "Measuring Positions on a Photograph", *Sky and Telescope*, Julio 1990.
- [28] Schlyter P., *Computing Planetary Positions*, <http://www.stjarnhimlen.se/>
- [29] Jet Propulsion Laboratory, <http://www2.jpl.nasa.gov/>
- [30] Minor Planet Center Orbit Database, <http://cfa-www.harvard.edu/iau/mpc.html>



**Escola Politècnica Superior  
de Castelldefels**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

# ANEXOS

**TITULO DEL TFC: Navegación en el sistema solar empleando asteroides  
como referencia**

**TITULACION: Enginyeria Tècnica Aeronàutica, especialitat Aeronavegació**

**AUTOR: José Luis Chica Bermejo**

**DIRECTOR: Jordi Gutiérrez Cabello**

**FECHA: 29 de Junio de 2005**





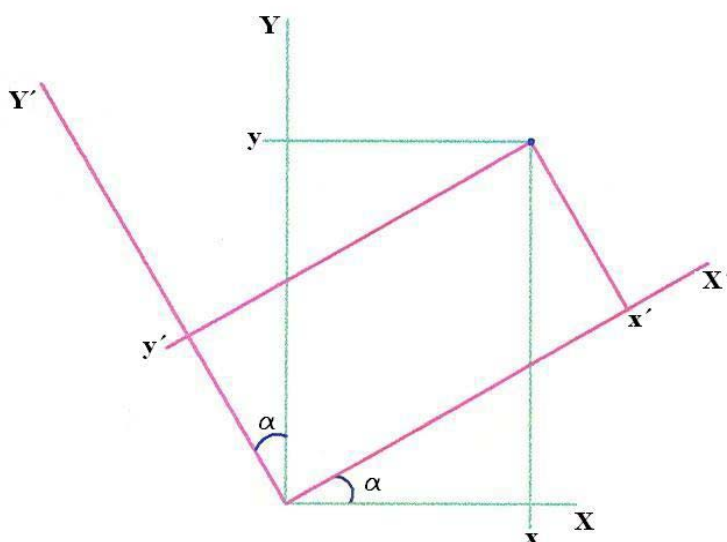
## ANEXO A. ROTACIONES

En este anexo, se justifican las fórmulas empleadas en el trabajo, para realizar las rotaciones de las coordenadas de un punto dado, entre el sistema ecuatorial y el eclíptico o viceversa.

### A.1. Rotación de un sistema de dos coordenadas

Vamos primero a considerar el caso general de un sistema de coordenadas de dos ejes  $X$  e  $Y$ , que luego podremos aplicar fácilmente al caso concreto que nos interesa para el trabajo.

Partimos de unos ejes genéricos  $X$  e  $Y$ , a partir de los cuales tenemos definida la posición de un punto de coordenadas  $(x, y)$ , representamos este sistema en color verde en la figura A.1. Si realizamos una rotación de este sistema de coordenadas respecto del origen, quedarán definidos dos nuevos ejes de coordenadas  $X'$  e  $Y'$  con el origen común al sistema anterior, estos nuevos ejes se representan de color rojo en la figura A.1, y al ángulo girado le llamaremos  $\alpha$ . Al rotar los ejes de coordenadas, es importante fijarse que el punto que teníamos no cambia de posición en el espacio bidimensional representado, ya que no está ligado a ninguno de los dos sistemas de coordenadas; lo único que cambiará serán sus coordenadas de posición. Por tanto, las coordenadas  $(x', y')$  definen la posición del mismo punto dado antes de la rotación con  $(x, y)$ , pero respecto a los nuevos ejes  $X'$  e  $Y'$ .



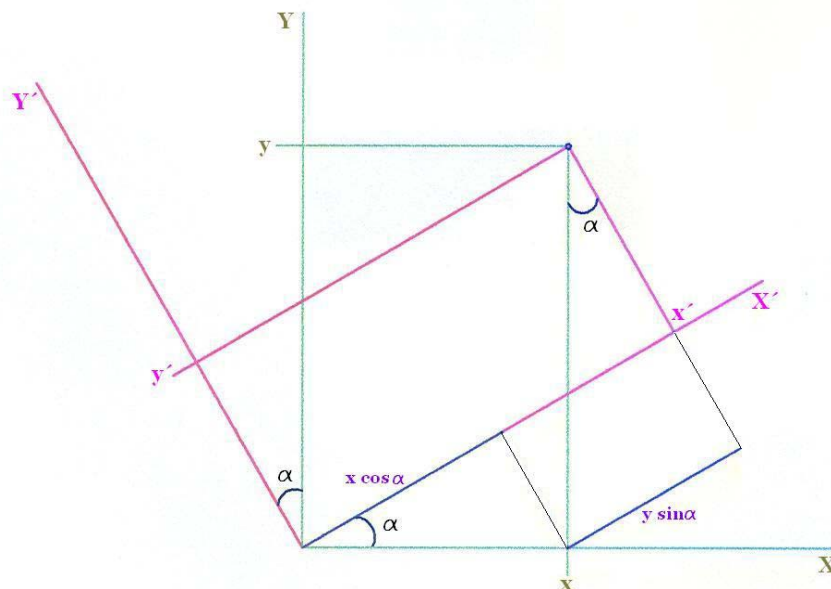
**Fig. A.1** Rotación de los ejes  $X$  e  $Y$  un ángulo  $\alpha$

Si conocemos los valores de las coordenadas de posición iniciales  $(x, y)$  del punto en el sistema de ejes  $X$  e  $Y$ , y conocemos el valor del ángulo girado

$\alpha$ , podremos deducir las coordenadas ( $x'$ ,  $y'$ ) de ese mismo punto en el sistema de ejes  $X'$  e  $Y'$ .

Primero deducimos el valor de la coordenada  $x'$  del punto, o lo que es lo mismo, la longitud sobre el eje  $X'$  desde el origen hasta el punto  $x'$ . En la figura A.2, se puede ver que esta longitud es la suma de las dos longitudes de las rectas marcadas en azul oscuro, que son respectivamente, el producto de la longitud de la coordenada  $x$  por el coseno de  $\alpha$ , y el producto de la longitud de la coordenada  $y$  por el seno de  $\alpha$ , por lo que el valor de la coordenada de posición  $x'$  del punto en el nuevo sistema de coordenadas será:

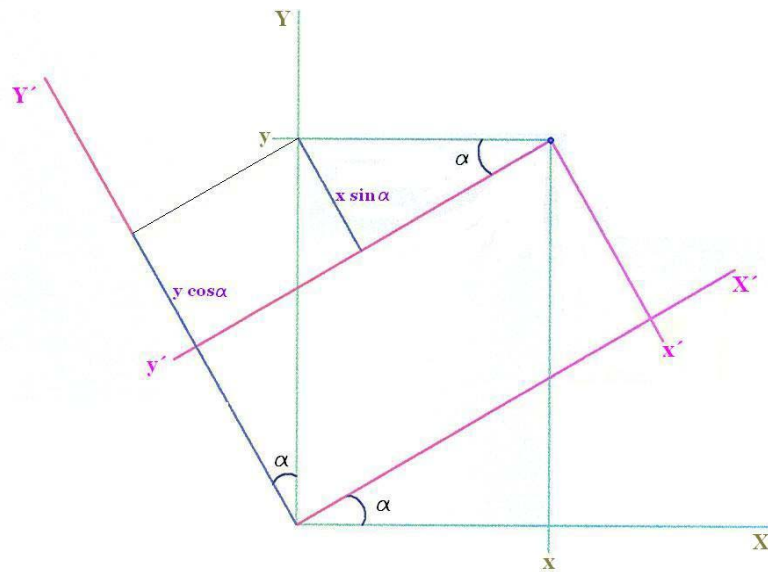
$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$



**Fig. A.2** Valor de la coordenada  $x'$

Para calcular el valor de la coordenada  $y'$  del punto, se hace un procedimiento similar. Esta vez su longitud será la diferencia entre las dos rectas marcadas en azul oscuro en la figura A.3, que como puede verse, son respectivamente, el producto de la longitud de la coordenada  $y$  por el coseno de  $\alpha$ , y el producto de la longitud de la coordenada  $x$  por el seno de  $\alpha$ , por lo que el valor de la coordenada  $y'$  del punto en el nuevo sistema será:

$$y' = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$$

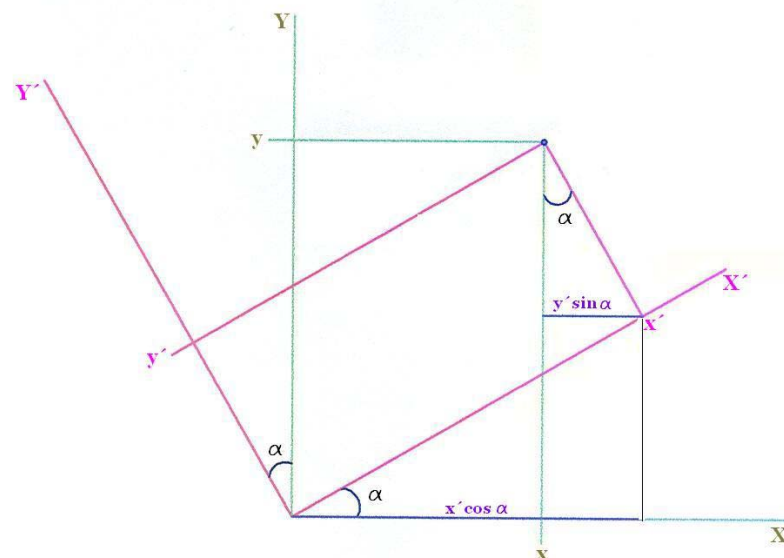


**Fig. A.3** Valor de la coordenada  $y'$

Por tanto vemos que se pueden conocer las coordenadas de la posición de un punto  $(x', y')$  respecto de los ejes  $X'$  e  $Y'$ , a partir de las coordenadas  $(x, y)$  iniciales y del ángulo  $\alpha$  girado.

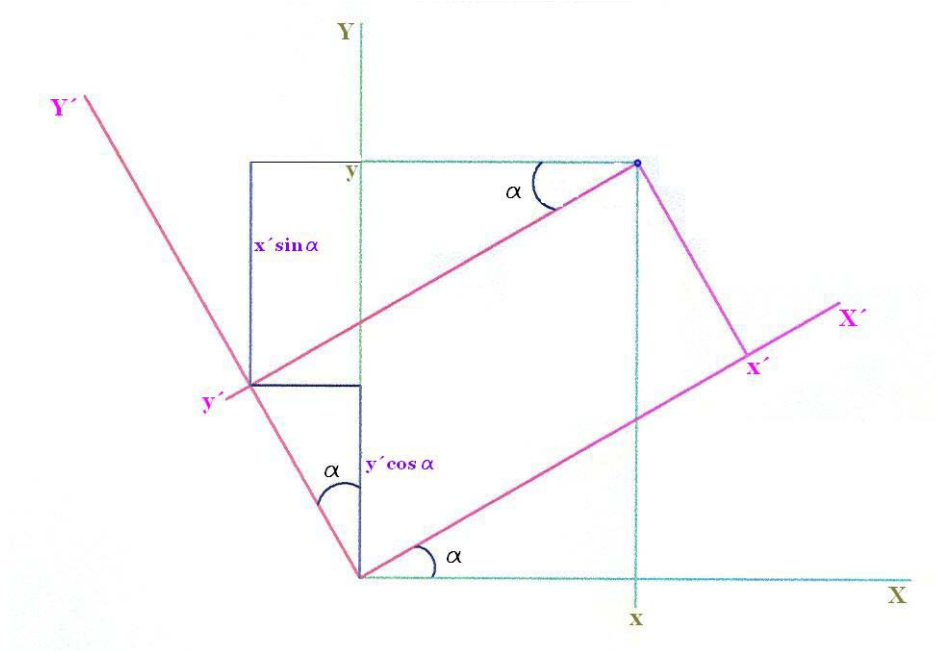
Si ahora nos encontramos en el caso inverso, en el que son conocidas las coordenadas en el sistema de ejes  $X'$  e  $Y'$ , y queremos calcular las coordenadas en el sistema de ejes  $X$  e  $Y$ , después de hacer una rotación de ángulo  $\alpha$  en sentido inverso al anterior. Se pueden deducir los valores de las nuevas coordenadas de posición del punto mediante las dos figuras A.4 y A.5 de las que obtenemos que:

$$x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha$$



**Fig. A.4** Valor de la coordenada  $x$

$$y = y' \cdot \cos \alpha + x' \cdot \sin \alpha$$



**Fig. A.5** Valor de la coordenada y

Es decir que las cuatro expresiones vistas que nos dan el valor de unas coordenadas en función de las otras y del ángulo girado son:

$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$

$$y' = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$$

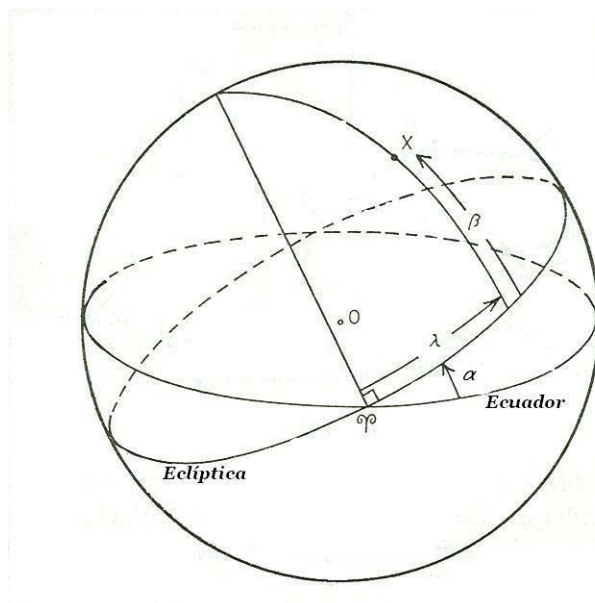
$$x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha$$

$$y = y' \cdot \cos \alpha + x' \cdot \sin \alpha$$

## A.2. Rotación de coordenadas ecuatoriales a eclípticas

En el apartado A.1 se ha considerado la rotación de dos ejes de coordenadas, es decir de un sistema de referencia bidimensional, y los que necesitamos rotar en el trabajo son tridimensionales, pero como se verá, aún así las deducciones hechas antes seguirán siendo válidas. En la figura A.6 se ven las posiciones relativas de los planos ecuatorial y eclíptico; el sistema de referencia ecuatorial estará formado por tres ejes cartesianos de los cuales el X y el Y estarán sobre el plano ecuatorial, y el eje Z será perpendicular a este plano. El sistema de referencia eclíptico, estará construido de una forma análoga pero sobre el plano eclíptico. Como se vio en el capítulo 2, los ejes X de los dos sistemas de referencia coincidían en el espacio y apuntaban en

dirección del punto Aries, por lo que si usamos este eje X común para realizar la rotación, los valores de la coordenada x no variarán y sólo lo harán los de las coordenadas z e y. Por lo tanto, estaremos en el caso explicado en el apartado A.1, con la diferencia de que las coordenadas no serán (x, y) sino (y, z).



**Fig. A.6** Posiciones relativas de los planos ecuatorial y eclíptico

Entonces, para pasar de la posición que tengamos de un punto del espacio, expresada en coordenadas ecuatoriales, a coordenadas eclípticas, o viceversa, rotaremos el sistema de tres ejes sobre su eje X común, y para utilizar las expresiones genéricas que obteníamos en el apartado A.1, para este caso tendremos que hacer los siguientes cambios de notación:

eje X  $\rightarrow$  eje Y ecuatorial  
 eje Y  $\rightarrow$  eje Z ecuatorial  
 coordenada x  $\rightarrow$  coordenada y<sub>ecua</sub>  
 coordenada y  $\rightarrow$  coordenada z<sub>ecua</sub>

eje X'  $\rightarrow$  eje Y eclíptico  
 eje Y'  $\rightarrow$  eje Z eclíptico  
 coordenada x'  $\rightarrow$  coordenada y<sub>eclip</sub>  
 coordenada y'  $\rightarrow$  coordenada z<sub>eclip</sub>

y una vez conocidas las coordenadas de una posición en coordenadas ecuatoriales, podré pasarlas a eclípticas aplicando las expresiones siguientes, obtenidas a partir de las del apartado A.1, y de los cambios de notación anteriores:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\ y' = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{eclip} = x_{ecua} \\ y_{eclip} = y_{ecua} \cdot \cos \alpha + z_{ecua} \cdot \sin \alpha \\ z_{eclip} = z_{ecua} \cdot \cos \alpha - y_{ecua} \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

El conjunto de tres ecuaciones de la rotación se puede representar de forma más compacta con notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_{Eclip} \\ y_{Eclip} \\ z_{Eclip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{Ecua} \\ y_{Ecua} \\ z_{Ecua} \end{bmatrix}$$

Y de forma similar, se podría hacer el caso inverso, en el que conocidas las coordenadas de una posición en coordenadas eclípticas queramos obtener sus coordenadas ecuatoriales:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha \\ y = y' \cdot \cos \alpha + x' \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{ecua} = x_{eclip} \\ y_{ecua} = y_{eclip} \cdot \cos \alpha - z_{eclip} \cdot \sin \alpha \\ z_{ecua} = z_{eclip} \cdot \cos \alpha + y_{eclip} \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

y esto mismo expresado con una matriz nos quedará:

$$\begin{bmatrix} x_{Ecua} \\ y_{Ecua} \\ z_{Ecua} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{Eclip} \\ y_{Eclip} \\ z_{Eclip} \end{bmatrix}$$

y ahora sólo nos faltará conocer el ángulo de rotación  $\alpha$  para pasar de un sistema a otro. Este ángulo será conocido, ya que es el que hay entre el plano del ecuador y el plano de la eclíptica, actualmente tiene un valor aproximado de  $23.4^\circ$ , y va variando por el efecto de precesión de los equinocios que hace moverse al ecuador terrestre. En el código del programa 2 incluido en el anexo E, y que se emplea para realizar los cálculos de la posición de la sonda, se asigna un valor a este ángulo en función de la época concreta en la que se realiza la rotación.

## ANEXO B. POSICION DE UN ASTEROIDE EN SU ORBITA

Para utilizar un asteroide como referencia para conocer la posición de nuestra sonda espacial, necesitaremos primero saber cuál será la posición del asteroide dentro del Sistema Solar, en un momento dado de su órbita. Para ello, utilizaremos una base de datos que contiene los elementos orbitales de unos asteroides con órbita conocida, esta base de datos la obtendremos del Minor Planet Center (MPC) de la Universidad de Harvard. Entonces a partir de los elementos orbitales de un asteroide tendremos que hallar su posición en el espacio del Sistema Solar. En este anexo se dan los fundamentos para hallar esta posición.

### B.1. Anomalía media

La base de datos del MPC, nos proporciona los seis elementos orbitales para cada asteroide, pero en lugar de darnos el parámetro de la anomalía verdadera  $\nu$  nos da la anomalía media  $M$ , por tanto vamos a empezar por definir que es la anomalía media.

Como sabemos por la segunda ley de Kepler, el asteroide no se moverá a una velocidad constante a lo largo de su órbita, por lo que su anomalía verdadera, (o ángulo entre la dirección del perihelio y el radio vector del Sol al asteroide), tampoco variará de una forma constante a lo largo de la órbita. Para facilitar los cálculos de la posición del asteroide si es conocido el tiempo desde que pasó por su perihelio; o el cálculo de ese tiempo conocida la posición del asteroide, se define la anomalía media, que es un ángulo que varía de forma uniforme con el tiempo mientras un cuerpo dado se mueve en su órbita.

Si consideramos que el ángulo entre la dirección del perihelio y el radio vector del Sol al asteroide, u otro cuerpo en su órbita, varía de una forma uniforme podremos calcular el ángulo recorrido para un tiempo  $t$  dado transcurrido tras pasar por el perihelio, es decir:

$$M = \frac{2\pi}{\Gamma}(t - T) \quad (1.1)$$

donde  $M$  será el ángulo recorrido o anomalía media,  $T$  será el tiempo al pasar por el perihelio,  $t$  el tiempo desde que se pasó por el perihelio,  $\Gamma$  será el tiempo en realizar una órbita completa (periodo), y  $2\pi$  es el ángulo en radianes recorrido en una vuelta completa. Ahora hay que ver como se podría expresar este ángulo  $M$  en función de las características de una órbita concreta.

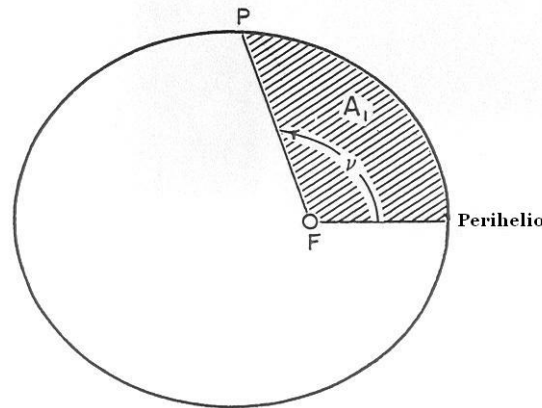
Aunque la anomalía media se puede definir para otras secciones cónicas vamos a ver el caso de las órbitas elípticas que tendrán los asteroides del



cinturón principal que tratamos en este caso. Como se ha comentado antes, la velocidad del asteroide en su órbita no será constante, sin embargo, sí lo será la velocidad con que varía el área barrida por el radio vector del Sol al asteroide, por tanto se puede establecer una igualdad entre los cocientes entre el periodo  $\Gamma$  de la órbita elíptica y el área total de la elipse, y entre el tiempo transcurrido desde el paso del perihelio y el área barrida en ese tiempo. A partir de esta igualdad puedo obtener una expresión para ese área, es decir:

$$\frac{t-T}{A_1} = \frac{\Gamma}{\pi ab} \Rightarrow A_1 = \pi ab \frac{t-T}{\Gamma} \quad (1.2)$$

donde  $\Gamma$  es el periodo de la órbita,  $a$  y  $b$  son los semiejes mayor y menor de la órbita elíptica,  $\pi ab$  es el área de la elipse orbital,  $T$  es el tiempo en el que el cuerpo pasa por el perihelio,  $t$  es el tiempo desde que paso por él, y  $A_1$  es el área barrida en  $t-T$ . En la figura B.1, se representa con el punto  $P$  la posición del cuerpo en su órbita, después de un tiempo  $t$  de pasar por el perihelio, también se representan el área  $A_1$  barrida, y la anomalía verdadera  $\nu$  del cuerpo, en nuestro caso el asteroide.



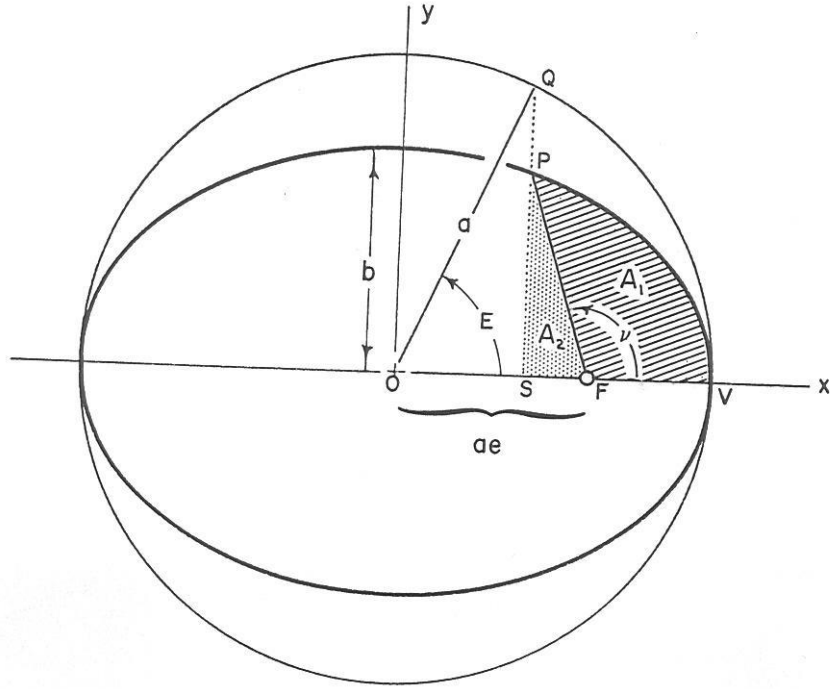
**Fig. B.1** Área barrida por el radio vector desde su paso por el perihelio

Ahora vamos a buscar otra forma de expresar este mismo área  $A_1$  de forma diferente a 1.2, y luego igualando las dos expresiones de  $A_1$  se deducirá la expresión de la anomalía media  $M$  definida en 1.1. Para buscar la nueva expresión para  $A_1$  utilizaremos un nuevo ángulo que se llamará anomalía excéntrica  $E$ .

## B.2. Anomalía excéntrica

En este apartado vamos a buscar la expresión de  $A_1$  en función del ángulo de anomalía excéntrica  $E$ , este ángulo es el representado en la figura B.2, donde se ha circunscrito un círculo sobre la órbita elíptica del asteroide.

Como puede verse,  $E$  es el ángulo medido entre la dirección del perihelio de la órbita y el punto  $Q$ , este punto se encuentra prolongando la línea punteada de la figura desde el punto  $P$ , donde se encontraría el asteroide, hasta cortar con el círculo representado, de radio igual al semieje mayor de la elipse orbital.



**Fig. B.2** Elementos para definir las anomalías excéntrica y media

La elipse y la circunferencia dibujadas en la figura B.2, tendrán una relación entre sus coordenadas cartesianas  $y$  que puede deducirse de las ecuaciones de ambas:

$$Elipse \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_{Elipse} = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$Circunferencia \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow y_{Circunferencia} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

donde  $b$  es el semieje menor de la órbita elíptica, y  $a$  el semieje mayor de la misma órbita, y el radio de la circunferencia circunscrita; por lo que la relación entre las coordenadas cartesianas  $y$  de la elipse y la circunferencia es:

$$\frac{y_{Elipse}}{y_{Circunferencia}} = \frac{b}{a} \quad (1.3)$$

Vista la relación anterior, para encontrar la expresión para  $A_1$ , podemos ver en la figura B.2, que si llamamos PSV al área comprendida entre estos tres puntos P, S, y V, tendremos que:

$$A_1 = PSV - A_2 \quad (1.4)$$

dónde  $A_2$  es el área del triángulo de base  $(ae - a \cdot \cos E)$ , y altura la de la coordenada  $y$  del punto P de la elipse, o lo que es lo mismo, la de la coordenada  $y$  del punto Q de la circunferencia multiplicada por  $b/a$  según la expresión 1.3, o sea  $(b/a) \cdot (a \cdot \sin E)$ .

$$A_2 = \frac{(ae - a \cos E) \cdot \left( \frac{b}{a} a \sin E \right)}{2} = \frac{aeb \sin E - a \cos E \cdot \sin E}{2}$$

$$A_2 = \frac{ab}{2} \cdot (e \cdot \sin E - \cos E \cdot \sin E) \quad (1.5)$$

Ahora en la figura B.2 también se puede ver la relación entre las áreas de los triángulos formados entre los puntos PSV, y entre los puntos QSV, que llamaremos respectivamente PSV y QSV. El área QSV vendrá dada por la expresión  $(base \cdot y_Q)/2$ , donde  $y_Q$  es la altura del triángulo dada por la coordenada  $y$  del punto Q, por otro lado, el área PSV será igual a  $(base \cdot y_P)/2$ , donde ahora  $y_P$  es la coordenada  $y$  del punto P. Como ambos triángulos tienen la misma base, y mediante 1.3 puedo expresar  $y_P$  como  $y_P = (b/a) \cdot y_Q$ , nos quedará la siguiente relación entre PSV y QSV

$$PSV = \frac{b}{a} \cdot QSV \quad (1.6)$$

y como de nuevo puede verse en la figura B.2, el área QSV será el área de la porción de circunferencia entre el perihelio de la órbita y el punto Q, menos el área del triángulo de base  $(a \cdot \cos E)$  y altura  $(a \cdot \sin E)$ , es decir:

$$QSV = \frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} (a \cdot \cos E \cdot a \cdot \sin E) = \frac{a^2}{2} (E - \cos E \cdot \sin E)$$

donde  $E$  ha de estar en radianes, para que sea válido el cálculo del área de la porción de circunferencia  $(1/2) \cdot a^2 \cdot E$ . Hecho esto, y aplicando la expresión 1.6 quedará:

$$PSV = \frac{ab}{2} (E - \cos E \cdot \sin E) \quad (1.7)$$

y si ahora en la expresión 1.4 para  $A_1$ , sustituimos  $PSV$  y  $A_2$  por las expresiones 1.7 y 1.5 respectivamente, obtendremos la expresión buscada de  $A_1$ .

$$\begin{aligned} A_1 &= PSV - A_2 \\ A_1 &= \frac{ab}{2} (E - \cos E \cdot \sin E) - \frac{ab}{2} \cdot (e \cdot \sin E - \cos E \cdot \sin E) \\ A_1 &= \frac{ab}{2} \cdot (E - e \cdot \sin E) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Una vez obtenida esta expresión 1.8 de  $A_1$  podemos igualarla a la expresión 1.2 de  $A_1$  que habíamos obtenido antes, quedando lo siguiente:

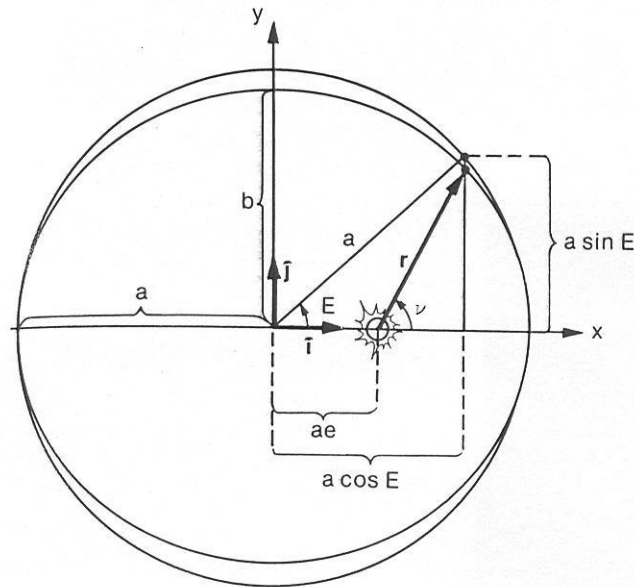
$$\begin{aligned} A_1 &= \pi a b \frac{t - T}{\Gamma} = \frac{ab}{2} \cdot (E - e \cdot \sin E) \\ 2\pi \cdot \frac{t - T}{\Gamma} &= (E - e \cdot \sin E) \end{aligned}$$

y el termino a la izquierda del signo igual, coincide con el de la expresión 1.1 que definía el concepto de la anomalía media  $M$ , por lo que mediante la definición de la anomalía excéntrica  $E$ , y las manipulaciones hechas, hemos llegado a una expresión que nos permite conocer  $M$  a partir de  $E$ . Esta expresión 1.9 se conoce como Ecuación de Kepler.

$$M = (E - e \cdot \sin E) \quad (1.9)$$

### B.3. Posición del asteroide

La ecuación de Kepler que hemos deducido, nos permitirá calcular la anomalía media  $M$  una vez conocida la anomalía excéntrica  $E$ , sin embargo, en la base de datos utilizada con los elementos orbitales de los asteroides, nos encontramos con el caso inverso, pues nos dan el valor de  $M$ , y a partir de él queremos saber el valor del ángulo de anomalía excéntrica  $E$ . Conocido el valor de  $E$ , se puede calcular la posición del asteroide en su órbita definida por los demás elementos orbitales, esto se puede ver en la siguiente figura B.3,



**Fig. B.3** Relación entre el ángulo  $E$  y la posición del asteroide

A partir de la figura B.3, que es análoga a la que se ha empleado para deducir la ecuación de Kepler, se puede ver que la posición del cuerpo en su órbita está determinada por el radio vector  $r$ . Este, se puede calcular a partir de los datos de la órbita dados por dos de los elementos orbitales: la excentricidad  $e$ , y el semieje mayor  $a$ , y a partir de la anomalía excéntrica  $E$ , en el instante de tiempo en el que queremos saber la posición del asteroide, u otro cuerpo en esa órbita. La posición indicada por el vector  $r$ , vendrá dada por sus dos componentes  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , tal como indica la siguiente expresión.

$$r = a \cdot (\cos E - e) \hat{i} + a \cdot \sin E \hat{j} \quad (1.10)$$

Luego para determinar la posición  $r$  necesitamos conocer primero  $E$ . Para obtener  $E$  a partir de los datos conocidos,  $M$ ,  $e$ , y de la Ecuación de Kepler dada en 1.9, no existe una solución analítica, y desde los tiempos de Kepler han habido muchos matemáticos que han propuesto métodos para obtener una solución, a partir de aproximaciones sucesivas, o a partir de soluciones gráficas. En nuestro caso, el método empleado ha sido el dado por la referencia [28], que consiste en calcular un valor inicial para  $E$ , y a partir de

este valor que llamamos  $E_0$ , hallar aproximaciones sucesivas con la siguiente expresión:

$$E = E_0 + \Delta E_0 \quad (1.11)$$

dónde  $\Delta E_0$  es una pequeña fracción de  $E_0$  que calcularemos sustituyendo la expresión anterior 1.11 de  $E$  en la Ecuación de Kepler 1.9:

$$M = (E_0 + \Delta E_0) - e \sin(E_0 + \Delta E_0)$$

y expandiendo la expresión anterior, y despreciando todos los términos mayores de primer orden, llegamos a la expresión utilizada para encontrar  $\Delta E_0$ .

$$M = E_0 - e \sin E_0 + \Delta E_0 (1 - e \cos E_0)$$

$$\Delta E_0 = \frac{M - (E_0 - e \sin E_0)}{1 - e \cos E_0} \quad (1.12)$$

Como valor inicial se toma el siguiente valor obtenido a partir de la anomalía media  $M$  conocida:

$$E_0 = M + e \sin M \cdot (1 + e \cos M) \quad (1.13)$$

y a partir de este valor inicial se calcula una mejor aproximación con 1.11 y 1.12, y a partir de esta, se calcula otra nueva aproximación de la misma manera, este proceso se itera hasta que la diferencia entre sucesivas aproximaciones sea suficientemente pequeña, tomando el último valor obtenido de  $E$  como el valor definitivo de  $E$ . A partir del valor obtenido del ángulo de anomalía excéntrica  $E$ , se podrá calcular la posición del asteroide en su órbita con 1.10 u otra expresión equivalente.

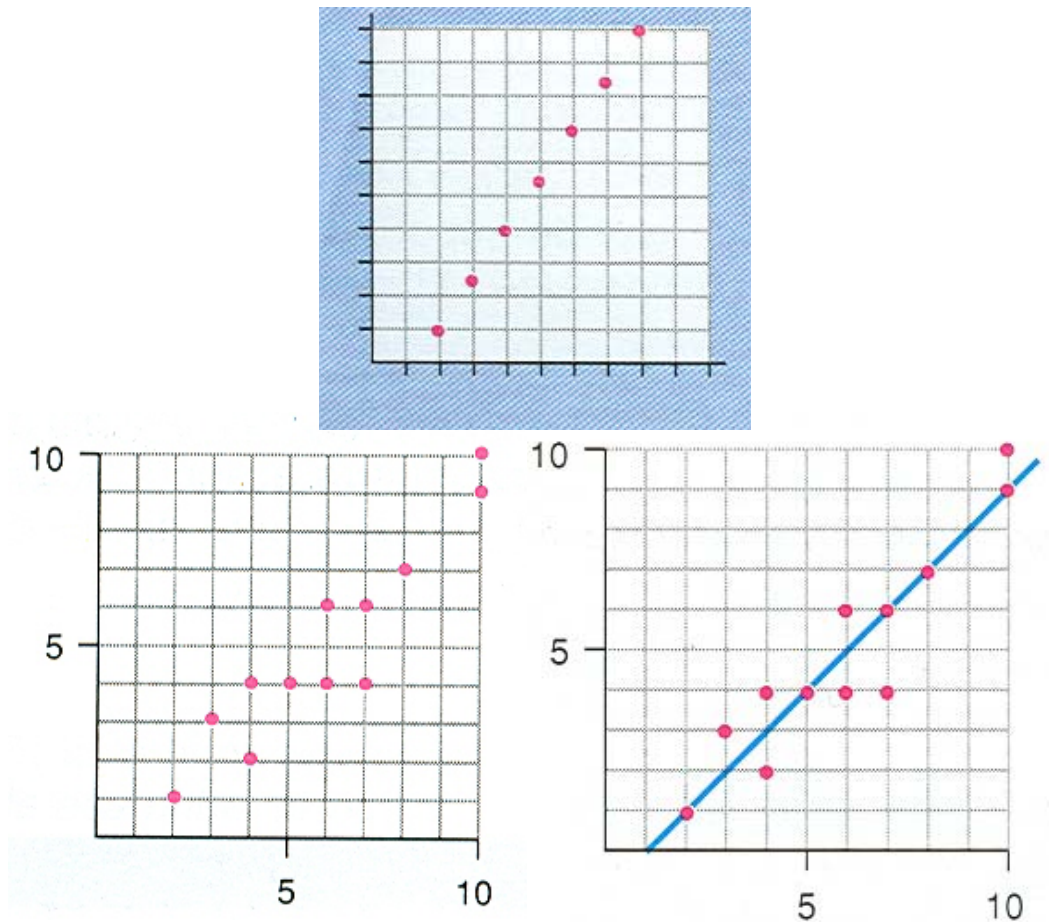
## ANEXO C. METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Una herramienta fundamental usada en el programa 1, el cual calcula las coordenadas celestes del asteroide, a partir de la imagen de él captada por el sensor CCD de la sonda, será el método de los mínimos cuadrados. Mediante este método, se calculan las constantes de la placa vistas en el capítulo 4, por lo que consideramos importante incluir una explicación del método en este anexo.

### C.1. Fundamentos del método de los mínimos cuadrados

En la práctica, será muy posible que en el campo de imagen captado con nuestro asteroide de referencia, podamos encontrar más de tres estrellas de fondo, cuyas posiciones puedan ser determinadas a partir de un catálogo estelar suficientemente extenso. Entonces, será mejor escoger más de tres estrellas para la determinación de las constantes de la placa, para conseguir una mayor precisión en la determinación de estas constantes, y por tanto también en la determinación de las coordenadas celestes del asteroide. Luego para hallar las constantes de la placa, en lugar de tener el sistema de tres ecuaciones lineales propuesto en el capítulo 4, tendremos un mayor número de ecuaciones, y para determinar las constantes de la placa emplearemos el llamado método de los mínimos cuadrados que se explica a continuación.

Como se vio en el capítulo 4, para cada estrella de fondo escogida, se podrán determinar sus coordenadas estándar normalizadas  $(\xi'', \eta'')$ , y medir sus coordenadas  $(x, y)$  sobre la imagen CCD. Entonces, podremos calcular para cada estrella, las diferencias  $\xi'' - \frac{x}{OC}$  y  $\eta'' - \frac{y}{OC}$ , que como se dijo, se podían caracterizar por una expresión lineal de la forma  $ax + by + c$ . Cuando tratemos con varias estrellas, tendremos varios valores de las diferencias anteriores, y todos estos valores deberán seguir la misma relación lineal dada. Gráficamente, esto se puede representar sobre un plano con coordenadas  $(x, y)$  en el que los valores de las diferencias, para cada una de las coordenadas estándar  $\xi''$  o  $\eta''$ , serán puntos en el plano; estos puntos seguirán la ecuación lineal propuesta, y deberían caer todos sobre una línea recta tal como se muestra en la gráfica superior de la figura C.1. Sin embargo, los puntos que representan las diferencias se alejarán ligeramente de la recta, debido a múltiples factores, como por ejemplo errores en las determinaciones de las medidas sobre la imagen, errores de redondeo en los cálculos de las coordenadas estándar, o ligeras diferencias entre los errores reales en la determinación de las coordenadas estándar y el modelo lineal propuesto; por lo que los puntos estarán distribuidos en el plano  $xy$  como se muestra en la gráfica inferior izquierda de la figura C.1. Entonces, en la práctica obtendremos un conjunto de puntos dispersos pero con una tendencia lineal, y lo que hace el método de los mínimos cuadrados para este caso concreto lineal, es buscar la recta que mejor se ajuste a estos puntos, tal como se muestra en la gráfica inferior derecha de la figura C.1.



**Fig. C.1** Gráficas con los valores de las diferencias  $\xi'' - \frac{x}{OC}$ , ó  $\eta'' - \frac{y}{OC}$ , de cada estrella

Básicamente, el método lo que hace es calcular cuál es la diferencia entre cada valor de los puntos obtenidos, y el valor que predice la expresión lineal para ese punto, (ver gráfica inferior derecha de la figura C.1). Después, eleva esa diferencia al cuadrado, y suma todas las diferencias de todos los puntos, a la expresión de esta suma se le llama  $\chi^2$ , y busca para que valores de los coeficientes de la expresión lineal se hace mínima esta expresión de  $\chi^2$ . Los valores así encontrados para estos coeficientes definirán la recta que mejor ajuste a los puntos de la gráfica, y serán los valores de las constantes que estamos buscando.

## C.2. Aplicación para determinar las constantes de la placa

Vamos a ver con más detalle como se realiza el proceso comentado para el caso de la coordenada  $\xi''$  de nuestro problema, el cual nos llevaría a determinar las constantes a, b, y c de la expresión:



$$\xi'' - \frac{x}{OC} = ax + by + c$$

Para empezar, definimos como  $z$  a los valores que toma la siguiente resta para las distintas estrellas consideradas,

$$z = \xi'' - \frac{x}{OC}$$

cómo se ha visto, la expresión lineal no coincidirá exactamente con los valores de las  $z$  anteriores, por lo que en cada una podremos calcular la diferencia,

$$z - (ax + by + c)$$

si ahora elevamos al cuadrado esta diferencia, y sumamos para las  $N$  diferencias de las  $N$  estrellas consideradas, obtenemos una expresión para  $\chi^2$ ,

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N (z_i - (ax_i + by_i + c))^2$$

y después, buscamos para que valores de  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , se hace mínima esta expresión derivándola respecto de  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , e igualando a cero,

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N x_i (z_i - ax_i - by_i - c) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i z_i - a \sum_{i=1}^N x_i^2 - b \sum_{i=1}^N x_i y_i - c \sum_{i=1}^N x_i = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N y_i (z_i - ax_i - by_i - c) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N y_i z_i - a \sum_{i=1}^N x_i y_i - b \sum_{i=1}^N y_i^2 - c \sum_{i=1}^N y_i = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^N (z_i - ax_i - by_i - c) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N z_i - a \sum_{i=1}^N x_i - b \sum_{i=1}^N y_i - Nc = 0$$

ahora, para determinar los valores de  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , planteamos el siguiente sistema de ecuaciones a partir de las expresiones de las derivadas parciales anteriores,

$$\left[ \begin{array}{l} a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i y_i + c \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i z_i \\ a \sum_{i=1}^N x_i y_i + b \sum_{i=1}^N y_i^2 + c \sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N y_i z_i \\ a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N y_i + Nc = \sum_{i=1}^N z_i \end{array} \right]$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones por la regla de Cramer, encontramos las expresiones utilizadas en el programa 2, a partir de las cuales podremos obtener los valores de a, b, y c que serán tres de las constantes de la placa.

Sólo se detalla la resolución para encontrar la expresión para la constante a, pues para el resto de las constantes de la placa la resolución se realiza de la misma manera, y dan como resultado las expresiones utilizadas en el programa.

Para la constante **a**, siguiendo el método de Cramer para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, resolvemos el determinante que llamamos DD:

$$\begin{aligned}
 DD &\equiv \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i y_i & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i & \sum_{i=1}^N y_i^2 & \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N y_i & N \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i^2 \cdot N + \sum_{i=1}^N x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i \cdot N = \\
 &= \sum_{i=1}^N x_i^2 \left( N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^N x_i y_i \left( \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i - N \sum_{i=1}^N x_i y_i \right) + \sum_{i=1}^N x_i \left( \sum_{i=1}^N x_i y_i \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)
 \end{aligned}$$

y ahora resolvemos el determinante que llamamos A:

$$\begin{aligned}
 A &\equiv \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_i z_i & \sum_{i=1}^N x_i y_i & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N y_i z_i & \sum_{i=1}^N y_i^2 & \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N z_i & \sum_{i=1}^N y_i & N \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^N x_i z_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i^2 \cdot N + \sum_{i=1}^N y_i z_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N z_i -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N z_i - \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i z_i - \sum_{i=1}^N x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i z_i \cdot N = \\
& = \sum_{i=1}^N z_i x_i \left( N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^N x_i y_i \left( \sum_{i=1}^N z_i \sum_{i=1}^N y_i - N \sum_{i=1}^N z_i y_i \right) + \\
& + \sum_{i=1}^N x_i \left( \sum_{i=1}^N z_i y_i \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N z_i \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)
\end{aligned}$$

conocidos los determinantes DD y A, el valor de la constante **a** se calculará con

$$\mathbf{a} = \frac{A}{DD}$$

y cambiando z por el valor de la diferencia con que se definió,  $z = \xi'' - \frac{x}{OC}$ , obtendremos exactamente las expresiones que podemos ver en el programa 2.

Por un proceso análogo al anterior se obtienen las expresiones para calcular las constantes b y c usadas en el programa, y con un proceso similar se llega a las expresiones para hallar las otras tres constantes de la placa a', b', y c'.

## ANEXO D. PROGRAMA 1: CALCULO DE LA POSICION DEL ASTEROIDE VISTO DESDE LA Sonda

En este anexo, se da el código en Fortran del programa 1, hecho para realizar los cálculos vistos en el capítulo 4, en él, se incluyen comentarios para explicar que hace cada parte. Este código servirá para calcular las coordenadas celestes  $\alpha$  y  $\delta$ , de ascensión recta y declinación de un asteroide, a partir de la toma de una imagen suya captada con el sensor CCD de la sonda. También se incluyen en este anexo, las capturas de pantalla correspondientes a la ejecución del programa, con los datos del caso resuelto en el capítulo 6.

El programa nos pedirá que le introduzcamos una serie de datos a partir de los cuales realizará los cálculos, estos datos serán: las coordenadas celestes del centro de la imagen, las coordenadas celestes de cada una de las estrellas de fondo que vayamos a usar de referencia, los movimientos propios de estas estrellas, las posiciones medidas sobre la imagen captada de cada una de esas estrellas, y del asteroide. Además pedirá la distancia focal del sistema óptico acoplado al sensor CCD, el número de estrellas de referencia que vamos a utilizar, la época del catálogo estelar de donde provengan las posiciones de las estrellas, y por último la época en que se realiza la toma de la imagen del asteroide. Con todos estos datos el programa calculará las coordenadas celestes del asteroide. En el caso de que se pusiera este código dentro del conjunto de software de la sonda espacial, todos los parámetros que nos pide el programa serían suministrados desde la base de datos, y otros programas dentro de la misma sonda espacial.

### D.1. Código del programa principal 1

c  
c Programa para calcular la ascensión recta y la declinación del asteroide visto desde la sonda,  
c mediante el método de las constantes de la placa.

c

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

```
DIMENSION X(10), Y(10), X1(10), Y1(10)
DIMENSION A(10), D(10), R(10,9), RA(10), RD(10)
PARAMETER (PI=3.141592653589793)
```

```
DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6,R7,R8,R9,XS,YS / 11*0.0 /
DR=PI/180
```

c

c Introducción de los primeros datos necesarios para el cálculo.

c

```
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Introduzca la distancia focal del sistema óptico'
READ (5,*) O
```

```
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Introduzca la ascensión recta del centro de la imagen'
WRITE (6,*) "
```

```

WRITE (6,*) 'Horas:'
READ (5,*) V1
WRITE (6,*) 'Minutos:'
READ (5,*) V2
WRITE (6,*) 'Segundos:'
READ (5,*) V3

c
c Paso del valor de ascensión recta de horas, minutos, y segundos, a horas con decimales.
c
CALL HORAGRADO (V1 ,V2, V3, V)

c
c Pasa las horas con decimales, primero a grados, y luego a radianes.
c
A0=V*15*DR

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Introduzca la declinación del centro de la imagen'
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Grados:'
READ (5,*) V1
WRITE (6,*) 'Minutos de arco:'
READ (5,*) V2
WRITE (6,*) 'Segundos de arco:'
READ (5,*) V3

c
c Pasa el valor de la declinación a un valor en grados con decimales, y este a radianes.
c
CALL HORAGRADO (V1 ,V2, V3, V)
D0=V*DR

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Introduzca el equinocio y la época'
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Equinocio?:'
READ (5,*) EQ
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Epoca?:'
READ (5,*) EP

c
c Calcula el tiempo en años con decimales, desde la época del catálogo estelar del que se
c hayan sacado las coordenadas de las estrellas (equinocio), hasta la época que corresponde
c al momento en que se ha captado la imagen del asteroide (época). Este tiempo T, se emplea
c para hacer las correcciones de las posiciones de las estrellas de referencia por movimiento
c propio.
c
T=EP-EQ

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Cuantas estrellas se emplearan?. (entre 3 y 10)'
READ (5,*) N

DO J=1, N

c
c Introducción de las coordenadas celestes de cada estrella y corrección por movimiento propio
c
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Introduzca la ascensión recta de la estrella ', J
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Horas:'
READ (5,*) V1

```

```

WRITE (6,*) 'Minutos:'
READ (5,*) V2
WRITE (6,*) 'Segundos:'
READ (5,*) V3

```

```
CALL HORAGRADO (V1 ,V2, V3, V)
```

```

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Movimiento propio de la estrella en AR (seg/ano)'
READ (5,*) P1

```

```
A(J)=(V+T*P1/3600)*15*DR
```

```

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Introduzca la declinación de la estrella', J
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Grados:'
READ (5,*) V1
WRITE (6,*) 'Minutos de arco:'
READ (5,*) V2
WRITE (6,*) 'Segundos de arco:'
READ (5,*) V3

```

```
CALL HORAGRADO (V1 ,V2, V3, V)
```

```

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Movimiento propio de la estrella en Dec (arcseg/ano)'
READ (5,*) P2

```

```
D(J)=(V+T*P2/3600)*DR
```

c

c Cálculo de las coordenadas estándar ideales de cada estrella mediante las expresiones 4.11 c y 4.12 deducidas en el capítulo 4.  $X1(J) \equiv \xi''$ , y  $Y1(J) \equiv \eta''$ .

c

```

SD=SIN(D0)
CD=COS(D0)
SJ=SIN (D(J))
CJ=COS (D(J))

```

```
H = SJ*SD+CJ*CD*COS(A(J)-A0)
```

```

X1(J) = CJ*SIN(A(J)-A0) / H
Y1(J) = (SJ*CD-CJ*SD*COS(A(J)-A0)) / H

```

c

c Introducción de las coordenadas (x, y) de cada estrella medidas sobre la imagen captada c con el c sensor CCD.

c

```

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Posicion medida en la imagen de la estrella?', J
WRITE (6,*) 'x : '
READ (5,*) X(J)
WRITE (6,*) 'y : '
READ (5,*) Y(J)

```

```
END DO
```

c

c Introducción de las coordenadas (x, y) del asteroide medidas sobre la imagen.

c

```

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Introduzca la posicion medida en la imagen del asteroide'

```

```

WRITE (6,*) 'x :'  

READ (5,*) X2  

WRITE (6,*) 'y :'  

READ (5,*) Y2

```

c

c Cálculo de las constantes de la placa por el método de los mínimos cuadrados, visto en el  
 c anexo C, se emplean las expresiones deducidas es ese anexo.

c

```

DO J=1, N
  XS=XS+X(J)
  YS=YS+Y(J)

  R(J,1)=X(J)*X(J)
  R1=R1+R(J,1)

  R(J,2)=Y(J)*Y(J)
  R2=R2+R(J,2)

  R(J,3)=X(J)*Y(J)
  R3=R3+R(J,3)

  R(J,7)=Y1(J)-Y(J)/O
  R7=R7+R(J,7)

  R(J,8)=R(J,7)*X(J)
  R8=R8+R(J,8)

  R(J,9)=R(J,7)*Y(J)
  R9=R9+R(J,9)
END DO

DD=R1*(R2*N-YS*YS)-R3*(R3*N-XS*YS)+XS*(R3*YS-XS*R2)

D1=R8*(R2*N-YS*YS)-R3*(R9*N-R7*YS)+XS*(R9*YS-R7*R2)
E1=R1*(R9*N-R7*YS)-R8*(R3*N-XS*YS)+XS*(R3*R7-XS*R9)
F1=R1*(R2*R7-YS*R9)-R3*(R3*R7-XS*R9)+R8*(R3*YS-XS*R2)

D1=D1/DD
E1=E1/DD
F1=F1/DD

DO J=1, N
  R(J,4)=X1(J)-X(J)/O
  R4=R4+R(J,4)

  R(J,5)=R(J,4)*X(J)
  R5=R5+R(J,5)

  R(J,6)=R(J,4)*Y(J)
  R6=R6+R(J,6)
END DO

A1=R5*(R2*N-YS*YS)-R3*(R6*N-R4*YS)+XS*(R6*YS-R4*R2)
B1=R1*(R6*N-R4*YS)-R5*(R3*N-XS*YS)+XS*(R3*R4-XS*R6)
C1=R1*(R2*R4-YS*R6)-R3*(R3*R4-XS*R6)+R5*(R3*YS-XS*R2)

A1=A1/DD
B1=B1/DD
C1=C1/DD

```

c

c Presentación de las constantes de la placa.

c

```
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Las constantes de la placa son:'
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'a : '
WRITE (6,1) A1
WRITE (6,*) 'b : '
WRITE (6,1) B1
WRITE (6,*) 'c : '
WRITE (6,1) C1
WRITE (6,*) 'a prima : '
WRITE (6,1) D1
WRITE (6,*) 'b prima : '
WRITE (6,1) E1
WRITE (6,*) 'c prima : '
WRITE (6,1) F1
```

1 FORMAT (4X, F20.5)

c

c Cálculo de las coordenadas estándar normalizadas del asteroide con las expresiones 4.18 y 4.19 del capítulo 4, a partir de las constantes de la placa calculadas antes, de la posición medida del asteroide sobre la imagen captada (X2, Y2), y de la distancia focal O.

c

```
XX=A1*X2+B1*Y2+C1+X2/O
YY=D1*X2+E1*Y2+F1+Y2/O
```

c

c Cálculo de la ascensión recta del asteroide con la expresión 4.16, a partir de sus coordenadas estándar normalizadas obtenidas en el paso anterior, y de las coordenadas A y D de la prolongación del eje óptico sobre la esfera celeste.

C

```
B=CD-YY*SD
```

```
A5=ATAN(XX/B)
IF (B.LT.0) THEN
  A5=A5+PI
END IF
A6=A5+A0
IF (A6.GT.(2*PI)) THEN
  A6=A6-2*PI
END IF
IF (A6.LT.0) THEN
  A6=A6+2*PI
END IF
```

```
V=A6/(DR*15)
```

```
CALL HGMS (AS1, AS2, AS3, V)
```

c

c Cálculo de la declinación del asteroide con la expresión 4.17, a partir de sus coordenadas estándar normalizadas, y de las coordenadas A y D de la prolongación del eje óptico sobre la esfera celeste.

c

```
D5=(COS(A5)*(YY*CD+SD))/B
D6=ATAN(D5)
```

```
V=D6/DR
```

```
CALL HGMS (DE1, DE2, DE3, V)
```

c



c Presentación en pantalla de las coordenadas de ascensión recta y declinación geocéntricas  
 c ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) obtenidas para el asteroide según se ve en la imagen captada desde la sonda.

c

```

WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Las coordenadas celestes del asteroide son:'
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'ASCENSION RECTA:'
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Horas:'
WRITE (6,1) AS1
WRITE (6,*) 'Minutos:'
WRITE (6,1) AS2
WRITE (6,*) 'Segundos:'
WRITE (6,1) AS3
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'DECLINACION:'
WRITE (6,*) "
WRITE (6,*) 'Grados:'
WRITE (6,1) DE1
WRITE (6,*) 'Minutos de arco:'
WRITE (6,1) DE2
WRITE (6,*) 'Segundos de arco:'
WRITE (6,1) DE3
WRITE (6,*) "

WRITE (6,*) 'Calculos finalizados'

STOP
END

```

## D.2. Código de las subrutinas del programa 1

c

c Subrutina que convierte una valor en horas, minutos y segundos a horas con decimales, o un  
 c valor dado en grados, minutos de arco y segundos de arco, a grados con decimales.

c

```

SUBROUTINE HORAGRADO (V1 ,V2, V3, V)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

IF (V1.LT.0) THEN
  S=-1
ELSE
  S=1
END IF

V1=ABS (v1)
V=S*(V1+V2/60+V3/3600)

RETURN
END

```

c

c Subrutina que convierte un valor en horas con decimales, a horas, minutos, y segundos, o un  
 c valor en grados, a grados, minutos de arco y segundos de arco.

c

```

SUBROUTINE HGMS (A1 ,A2, A3, V)

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

I=V

A1=I

$P=(V-I)*60$

I=P

A2=I

$P=(P-I)*60$

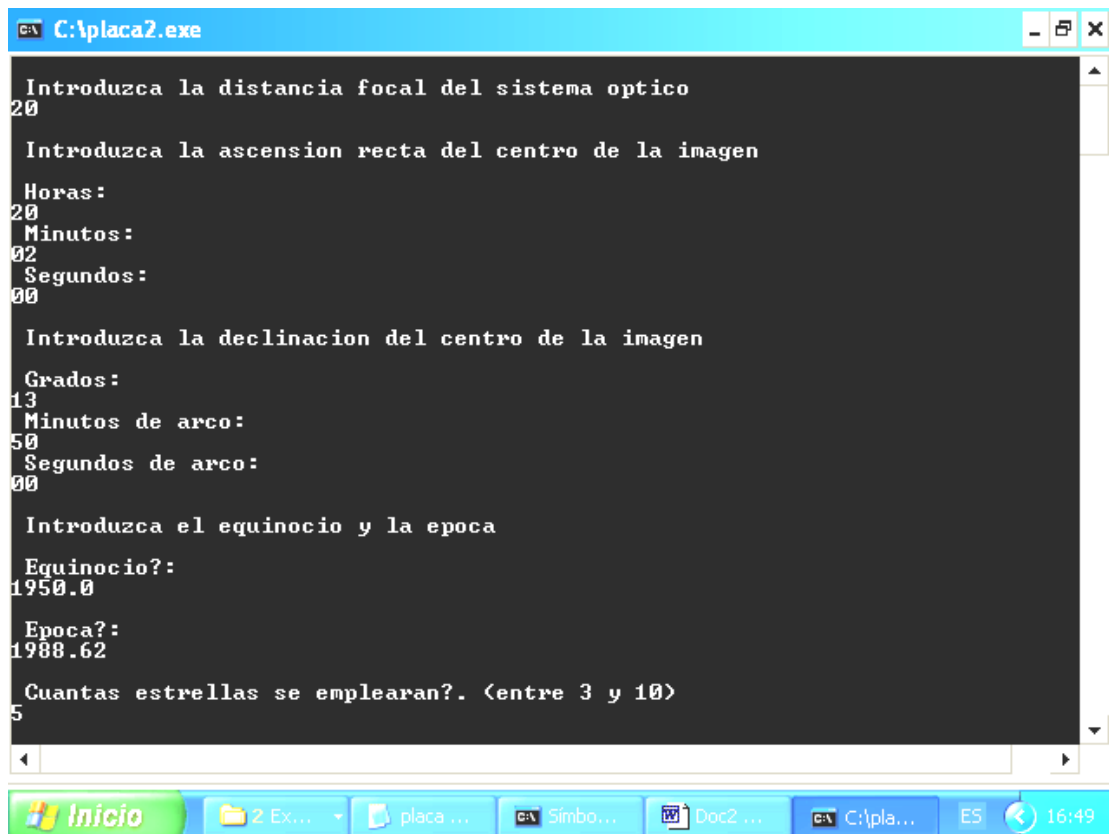
A3=P

RETURN

END

### D.3. Ejecución del programa 1 en el capítulo 6

En el capítulo 6, se da un ejemplo de la ejecución de este programa 1 para una caso concreto, al cual pertenecen las capturas de pantalla que se incluyen a continuación.



```
C:\placa2.exe
Introduzca la distancia focal del sistema optico
20
Introduzca la ascension recta del centro de la imagen
Horas:
20
Minutos:
02
Segundos:
00
Introduzca la declinacion del centro de la imagen
Grados:
13
Minutos de arco:
50
Segundos de arco:
00
Introduzca el equinocio y la epoca
Equinocio?:
1950.0
Epoca?:
1988.62
Cuantas estrellas se emplearan?. <entre 3 y 10>
5
```

```
C:\placa2.exe

Introduzca la ascension recta de la estrella 1
Horas:
20
Minutos:
02
Segundos:
49.691
Movimiento propio de la estrella en AR <seg/ano>
0.0009

Introduzca la declinacion de la estrella 1
Grados:
14
Minutos de arco:
09
Segundos de arco:
38.11
Movimiento propio de la estrella en Decl <arcseg/ano>
-0.015

Posicion medida en la imagen de la estrella? 1
x :
0.91390
y :
1.12604

Introduzca la ascension recta de la estrella 2
```

```
C:\placa2.exe

Introduzca la ascension recta de la estrella 2
Horas:
20
Minutos:
03
Segundos:
58.936
Movimiento propio de la estrella en AR <seg/ano>
-0.0001

Introduzca la declinacion de la estrella 2
Grados:
13
Minutos de arco:
39
Segundos de arco:
13.67
Movimiento propio de la estrella en Decl <arcseg/ano>
-0.001

Posicion medida en la imagen de la estrella? 2
x :
0.82013
y :
0.94729

Introduzca la ascension recta de la estrella 3
```

```
C:\placa2.exe

Introduzca la ascension recta de la estrella 3
Horas:
20
Minutos:
00
Segundos:
44.093

Movimiento propio de la estrella en AR <seg/ano>
-0.0006

Introduzca la declinacion de la estrella 3
Grados:
13
Minutos de arco:
32
Segundos de arco:
00.31

Movimiento propio de la estrella en Decl <arcseg/ano>
-0.037

Posicion medida en la imagen de la estrella? 3
x :
1.09641
y :
0.91136

Introduzca la ascension recta de la estrella 4
```

```
C:\placa2.exe

Introduzca la ascension recta de la estrella 4
Horas:
20
Minutos:
02
Segundos:
45.502

Movimiento propio de la estrella en AR <seg/ano>
0.0047

Introduzca la declinacion de la estrella 4
Grados:
13
Minutos de arco:
37
Segundos de arco:
15.97

Movimiento propio de la estrella en Decl <arcseg/ano>
-0.011

Posicion medida en la imagen de la estrella? 4
x :
0.92378
y :
0.93787

Introduzca la ascension recta de la estrella 5
```

```
C:\placa2.exe

Introduzca la ascension recta de la estrella 5
Horas:
20
Minutos:
02
Segundos:
27.265
Movimiento propio de la estrella en AR (seg/ano)
0.0008

Introduzca la declinacion de la estrella 5
Grados:
13
Minutos de arco:
55
Segundos de arco:
47.00
Movimiento propio de la estrella en Decl (arcseg/ano)
-0.011

Posicion medida en la imagen de la estrella? 5
x :
0.94719
y :
1.04618

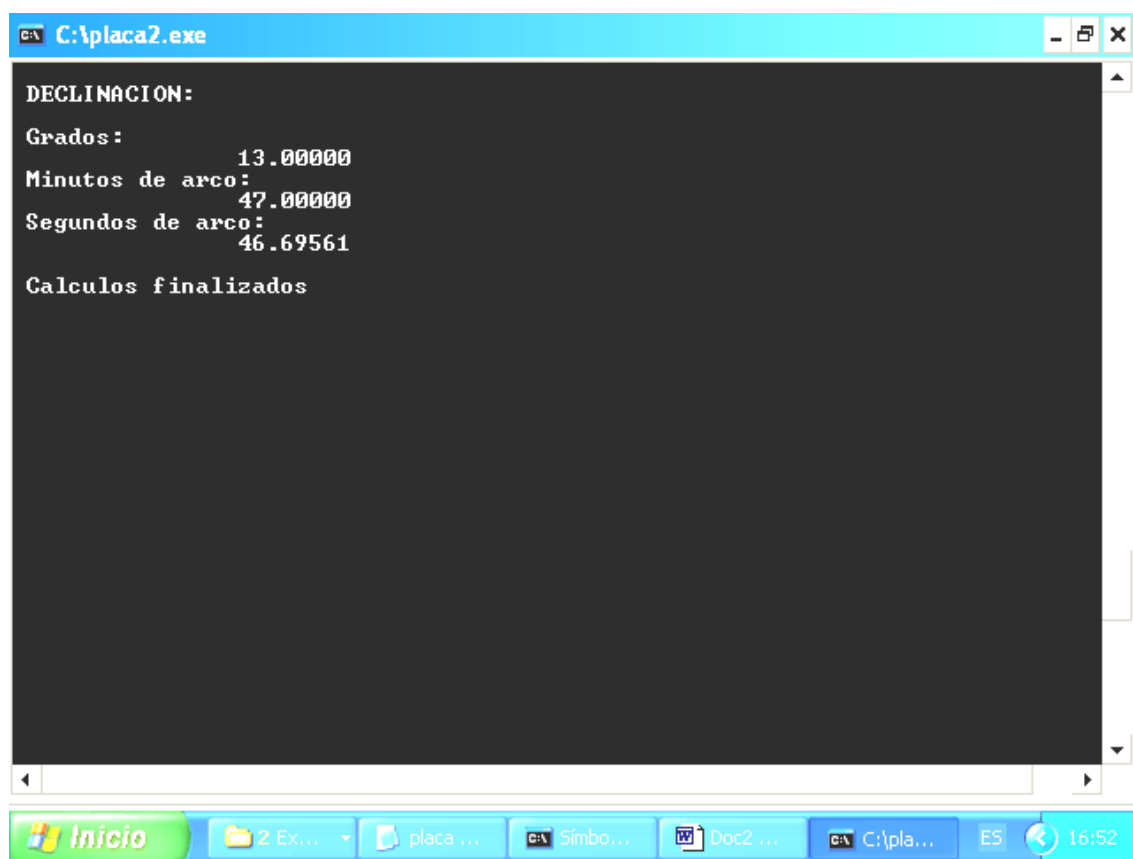
Introduzca la posicion medida en la imagen del asteroide
x :
```

```
C:\placa2.exe

Introduzca la posicion medida en la imagen del asteroide
x :
0.95046
y :
0.99977

Las constantes de la placa son:
a :
-0.10001
b :
-0.00118
c :
0.05053
a prima :
-0.00115
b prima :
0.00002
c prima :
-0.04956

Las coordenadas celestes del asteroide son:
ASCENSION RECTA:
Horas:
20.00000
Minutos:
2.00000
Segundos:
25.82012
```



## ANEXO E. PROGRAMA 2: CALCULO DE LA POSICION DE LA SONDA ESPACIAL

En este anexo, se adjunta el código del programa 2 con comentarios sobre su funcionamiento. Este programa calcula la posición de la sonda en el Sistema Solar, para ello se basa en el segundo método explicado en el capítulo 5, pero utilizando cuatro asteroides como referencia en lugar de sólo dos. El programa nos pide primero el instante de tiempo de la captura de las imágenes, después, lee un archivo con los parámetros orbitales de 100 asteroides, y una vez leído, calcula la posición geocéntrica de cada asteroide del archivo. Luego, nos pide la posición estimada de la sonda, para calcular cuáles son los cuatro asteroides más cercanos a ella en ese momento. A partir de las coordenadas celestes de esos cuatro asteroides vistos desde la sonda, calcula la posición geocéntrica ecuatorial de la misma por el método de las líneas de visión. Por último, calcula la posición de la Tierra respecto del Sol, en el momento de la captura de las imágenes, para poder determinar la posición de la astronave en coordenadas heliocéntricas eclípticas ( $r, \lambda, \beta$ ).

Como ocurría para el caso del programa 1, si este programa estuviera integrado en la sonda real, los datos que nos pide por pantalla los proporcionaría la propia astronave. La posición estimada de la sonda, sería la calculada a partir de la propagación de la órbita de ésta para el momento de la captura de las imágenes, y las coordenadas de los asteroides vistas desde la sonda se calcularían con la captura de una imagen de cada asteroide aplicando el programa 1 visto en el anexo D.

Como se ha comentado, este programa tiene una parte que calcula las posiciones de los asteroides a partir de sus elementos orbitales, y la posición de la Tierra respecto del Sol, esta parte está basada en la referencia [28] de la bibliografía, y su fundamento se explica en el anexo B. Para el resto del programa se usa lo explicado en el método de las líneas de visión del capítulo 5; con la particularidad de que al emplear 4 asteroides como referencia, en cada proyección de las líneas de visión sobre los planos  $xy$ ,  $xz$ , e  $yz$ , habrá 4 líneas. Entonces, se calcularán los puntos de corte entre ellas, para las 6 posibles combinaciones de 2 en 2 de las 4 rectas, y por tanto en cada plano se realizan 6 determinaciones independientes del valor de 2 coordenadas; como cada una de las tres coordenadas  $x, y, z$ , se podrá determinar en dos de los planos  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ , entre los tres planos obtendremos 12 determinaciones para cada uno de los valores de las tres coordenadas  $x, y, z$ . Hecho esto, calculamos la media, su desviación estándar, y la desviación estándar de los valores obtenidos para cada coordenada, según la referencia [13] de la bibliografía.

Después del código con sus explicaciones, se incluyen otros apartados dónde se incluye lo siguiente: una explicación de la forma empleada por el programa para indicar las direcciones de las líneas de visión, la base de datos con los elementos orbitales de los 100 asteroides, algunos datos adicionales sobre los 100 asteroides, las distancias a la Tierra calculadas por el programa para los asteroides; y por último se incluyen 4 apartados más con información

del caso concreto resuelto en el capítulo 6, estos apartados contienen: las capturas de pantalla de la ejecución del programa, una tabla con los 100 asteroides ordenados por cercanía a la posición estimada de la sonda, dos archivos creados por el programa con las coordenadas de la posición calculada de la sonda, y 3 figuras representando el problema resuelto.

## E.1. Código del programa principal 2

c

c Esta primera parte del programa 2 genera el archivo "POSGEOC.res", que contiene las posiciones geocéntricas calculadas para los 100 asteroides contenidos en el archivo "DATA2.dat" con sus elementos orbitales.

c

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
PARAMETER (IN=100)
PARAMETER (IM=9)
DIMENSION ELEM(IN,IM),ELEM2(IM),POS(IN,IM-3)
DIMENSION DIST(IN,8),AUX(8)
DIMENSION COOV(4,3),DIST(4,4),PLXY(4,3),PLXZ(4,3),PLYZ(4,3)
DIMENSION A1(2, 2), B1(2), X(2)
DIMENSION SOLX(12),SOLY(12),SOLZ(12)

```

c

c Introducción de la fecha y hora de la toma de las imágenes de los asteroides.

c

```

1    WRITE (6,*)'FECHA Y HORA UTC DE LA TOMA DE IMAGENES:'
    WRITE (6,*)'ANO:'
    READ (5,*), IA
    WRITE (6,*)'MES:'
    READ (5,*), IB
    WRITE (6,*)'DIA:'
    READ (5,*), C
    WRITE (6,*)'HORA (UTC):'
    READ (5,*), D

```

c Cálculo del día Juliano correspondiente al instante de la captura de las imágenes.

```

CALL DIAJUL (IA,IB,C,D,D1)

```

c

c Cálculo de la época en días Julianos, para la cual, el MPC da los elementos orbitales de los asteroides del archivo "DATA2.dat" (30-01-05, 0.0h.).

c

```

IA=2005
IB=1
C=30.0
D=0.0

```

```

CALL DIAJUL (IA,IB,C,D,D2)

```

c

c Días Julianos transcurridos desde el 30-01-05 0.0h, hasta la captura de la imagen de los asteroides.

c

```

D3=D1-D2

```

c

c Inicialización a 0 de ELEM, ELEM2 y POS.

c



```

DO I=1,IN
  DO J=1,IM
    ELEM(I,J)=0.0
  END DO
END DO

DO J=1,IM
  ELEM2(J)=0.0
END DO

DO I=1,IN
  DO J=1,IM-3
    POS(I,J)=0.0
  END DO
END DO

```

c

c Lectura de los elementos orbitales de los 100 asteroides de "DATA2.dat".

c

```

OPEN (1, FILE= 'DATA2.DAT', STATUS= 'OLD')
DO I= 1, IN
  READ (1, *) (ELEM(I, J), J= 1, IM)
END DO
CLOSE (1)

```

c

c Cálculo de la posición geocéntrica ecuatorial de los 100 asteroides a partir de sus elementos orbitales.

c

```

DO I=1,IN
  DO J=1,IM
    ELEM2(J)=ELEM(I,J)
  END DO
  CALL POSGASTER(D1,D3,ELEM2,XG,YG,ZG)
  POS(I,1)=XG
  POS(I,2)=YG
  POS(I,3)=ZG
  CALL REC_ESF (XG,YG,ZG,r,AR,DEC)
  POS(I,4)=r
  POS(I,5)=AR
  POS(I,6)=DEC
END DO

```

c

c Guarda en el archivo "POSGEOC.res", las posiciones geocéntricas ecuatoriales de los 100 asteroides en seis columnas, las tres primeras con las coordenadas rectangulares (x,y,z), y las tres segundas con las coordenadas esféricas (r,  $\alpha$ ,  $\delta$ ).

c

```

10  FORMAT (F10.5,1X,F10.5,1X,F10.5,1X,F10.5,1X,F10.5,1X,F10.5)

OPEN (2, FILE= 'POSGEOC.RES')
DO I= 1, IN
  WRITE (2,10) (POS(I, J), J= 1, IM-3)
END DO
CLOSE (2)

```

c

c La parte del código que viene a continuación, genera un archivo "ORDENDIST.res", que contiene las posiciones geocéntricas de los 100 asteroides calculadas antes, pero ordenadas en función de la distancia de cada asteroide a un punto dado en el espacio donde estaría la sonda espacial.

c

c

c Introducción de la posición estimada de la sonda.

c

```

WRITE (6,*)'POSICION ESTIMADA DE LA SONDA EN COORDENADAS
sRECTANGULARES GEOCENTRICAS:'
WRITE (6,*)'X:'
READ (5,*), XGS
WRITE (6,*)'Y:'
READ (5,*), YGS
WRITE (6,*)'Z:'
READ (5,*), ZGS

```

c

c Inicialización a 0 de DIST y AUX.

c

```

DO I=1,IN
  DO J=1,8
    DIST(I,J)=0.0
  END DO
END DO

```

```

DO I=1,8
  AUX(I)=0.0
END DO

```

c

c Introducción en columna 8 de DIST del número de orden de cada asteroide.

c

```

DO I=1,IN
  DIST(I,8)=I
END DO

```

c

c Lectura de las posiciones geocéntricas de los 100 asteroides.

c

```

OPEN (1, FILE= 'POSGEOC.RES', STATUS= 'OLD')
DO I= 1, IN
  READ (1, *) (DIST(I, J), J= 1, 6)
END DO
CLOSE (1)

```

c

c Introducción en columna 7 de DIST de la distancia entre la posición estimada de la sonda y  
c cada asteroide.

c

```

DO I=1,IN
  DIST(I,7)=SQRT((XGS-DIST(I,1))**2+(YGS-DIST(I,2))**2+(ZGS
s-DIST(I,3))**2)
END DO

```

c

c Ordenamiento en orden creciente de distancia de los 100 asteroides a la posición estimada  
c de la sonda.

c

```

DO I=1,IN
  DO J=1,IN-1
    IF (DIST(J,7).GT.DIST(J+1,7)) THEN
      DO K=1,8
        AUX(K)=DIST(J+1,K)
      END DO
      DO K=1,8
        DIST(J+1,K)=DIST(J,K)
      END DO
      DO K=1,8
        DIST(J,K)=AUX(K)
      END DO
    END IF
  END DO
END DO

```

```

        END DO
    END IF
END DO
END DO
c
c Crea el archivo "ORDENDIST.res" conteniendo los 100 asteroides con sus coordenadas
c geocéntricas, ordenados en función de su distancia a la posición estimada de la sonda.
c
10    FORMAT (I3,1X,F10.5,1X,F10.5,1X,F10.5,1X,F10.5,2X,F10.5,2X,
sF10.5,1X,F10.5,4X,F3.0)
    OPEN (2, FILE= 'ORDENDIST.RES')
    DO I= 1, IN
        WRITE (2,10) I,(DIST(I, J), J= 1, 8)
    END DO
    CLOSE (2)
c
c La siguiente parte del programa 2 genera los archivos "POSONDA1.res" y "POSONDA2.res"
c que contienen la posición de la sonda en el Sistema Solar. Para calcularla emplea las
c posiciones conocidas de los cuatro asteroides más cercanos a la posición estimada de la
c sonda, y las líneas de visión desde esta a los cuatro asteroides.
c
c Inicialización a 0 de todos los vectores y matrices de esta parte.
c
    DO I=1,4
        DO J=1,3
            DIST(I,J)=0.0
            COOV(I,J)=0.0
            PLXY(I,J)=0.0
            PLXZ(I,J)=0.0
            PLYZ(I,J)=0.0
        END DO
        DIST(I,J+1)=0.0
    END DO

    DO I=1,2
        DO J=1,2
            A1(I,J)=0.0
        END DO
        B1(I)=0.0
        X(I)=0.0
    END DO

    DO I=1,12
        SOLX(I)=0.0
        SOLY(I)=0.0
        SOLZ(I)=0.0
    END DO
c
c Lectura de la posición de los cuatro asteroides más cercanos a la sonda.
c
    OPEN (1, FILE= 'ORDENDIST.RES', STATUS= 'OLD')
    DO I= 1, 4
        READ (1, *) (DIST(I, J), J= 1, 4)
    END DO
    CLOSE (1)
c
c Introducción de las coordenadas ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) de los cuatro asteroides vistos desde la sonda. Estos
c valores se habrían obtenido mediante la captura desde la sonda de una imagen de cada
c asteroide, y aplicando a cada una el programa 1.

```

c

```

DO I=1,4
  WRITE (6,9)"
  WRITE (6,*)'Coordenadas de AR y DEC del asteroide',I,' medidas desde la sonda:'
  WRITE (6,*)'AR? '
  READ (5,*),AR
  WRITE (6,*)'Declinacion? '
  READ (5,*),DEC

```

c

c Cálculo de los valores x,y,z que definen la misma dirección desde la sonda dada por ( $\alpha$ ,  $\delta$ ).

c

```

r=10
CALL ESF_REC (r,AR,DEC,XV,YV,ZV)
COOV(I,1)=XV
COOV(I,2)=YV
COOV(I,3)=ZV
END DO

```

c

c Cálculo de las x,y,z geocéntricas que definen la dirección de los asteroides vistos desde la c sonda.

c

```

DO I=1,4
  DO J=1,3
    COOV(I,J)=COOV(I,J)+DIST(I,J+1)
  END DO
END DO

```

c

c Cálculo de las ecuaciones de las rectas de visión 3D proyectadas en 2D sobre los planos xy, c xz, yz (una recta por asteroide en cada plano).

c

```

DO I=1,4
  CALL RECTAVIS (DIST(I,2),DIST(I,3),COOV(I,1),COOV(I,2),A,B,C)
  PLXY(I,1)=A
  PLXY(I,2)=B
  PLXY(I,3)=C
END DO

```

```

DO I=1,4
  CALL RECTAVIS (DIST(I,2),DIST(I,4),COOV(I,1),COOV(I,3),A,B,C)
  PLXZ(I,1)=A
  PLXZ(I,2)=B
  PLXZ(I,3)=C
END DO

```

```

DO I=1,4
  CALL RECTAVIS (DIST(I,3),DIST(I,4),COOV(I,2),COOV(I,3),A,B,C)
  PLYZ(I,1)=A
  PLYZ(I,2)=B
  PLYZ(I,3)=C
END DO

```

c

c Cálculo, mediante la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, c de los puntos de corte de cada dos rectas de visión proyectadas. En cada plano habrá 4 c rectas y 6 parejas posibles de rectas.

c

c

c Cálculo de los 6 sistemas de ecuaciones de 2x2 para el plano xy.

c

```

K=0
DO I=2,4
  DO J=1,2
    A1(1,J)=PLXY(1,J)
    A1(2,J)=PLXY(I,J)
  END DO
  B1(2)=PLXY(I,3)
  B1(1)=PLXY(1,3)
  CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
  K=K+1
  SOLX(K)=X(1)
  SOLY(K)=X(2)
END DO

```

```

DO I=3,4
  DO J=1,2
    A1(1,J)=PLXY(2,J)
    A1(2,J)=PLXY(I,J)
  END DO
  B1(2)=PLXY(I,3)
  B1(1)=PLXY(2,3)
  CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
  K=K+1
  SOLX(K)=X(1)
  SOLY(K)=X(2)
END DO

```

```

DO J=1,2
  A1(1,J)=PLXY(3,J)
  A1(2,J)=PLXY(4,J)
END DO
B1(1)=PLXY(3,3)
B1(2)=PLXY(4,3)
CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
K=K+1
SOLX(K)=X(1)
SOLY(K)=X(2)

```

c

c Cálculo de los 6 sistemas de ecuaciones de 2x2 para el plano xz.

c

```

K1=0
DO I=2,4
  DO J=1,2
    A1(1,J)=PLXZ(1,J)
    A1(2,J)=PLXZ(I,J)
  END DO
  B1(2)=PLXZ(I,3)
  B1(1)=PLXZ(1,3)
  CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
  K=K+1
  K1=K1+1
  SOLX(K)=X(1)
  SOLZ(K1)=X(2)
END DO

```

```

DO I=3,4
  DO J=1,2

```

```

        A1(1,J)=PLXZ(2,J)
        A1(2,J)=PLXZ(I,J)
    END DO
    B1(2)=PLXZ(I,3)
    B1(1)=PLXZ(2,3)
    CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
    K=K+1
    K1=K1+1
    SOLX(K)=X(1)
    SOLZ(K1)=X(2)
END DO

```

```

DO J=1,2
    A1(1,J)=PLXZ(3,J)
    A1(2,J)=PLXZ(4,J)
END DO
B1(1)=PLXZ(3,3)
B1(2)=PLXZ(4,3)
CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
K1=K1+1
K=K+1
SOLX(K)=X(1)
SOLZ(K1)=X(2)

```

c

c Cálculo de los 6 sistemas de ecuaciones de 2x2 para el plano yz.

c

```

K=6
DO I=2,4
    DO J=1,2
        A1(1,J)=PLYZ(1,J)
        A1(2,J)=PLYZ(I,J)
    END DO
    B1(2)=PLYZ(I,3)
    B1(1)=PLYZ(1,3)
    CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
    K=K+1
    K1=K1+1
    SOLY(K)=X(1)
    SOLZ(K1)=X(2)
END DO

```

```

DO I=3,4
    DO J=1,2
        A1(1,J)=PLYZ(2,J)
        A1(2,J)=PLYZ(I,J)
    END DO
    B1(2)=PLYZ(I,3)
    B1(1)=PLYZ(2,3)
    CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
    K=K+1
    K1=K1+1
    SOLY(K)=X(1)
    SOLZ(K1)=X(2)
END DO

```

```

DO J=1,2
    A1(1,J)=PLYZ(3,J)
    A1(2,J)=PLYZ(4,J)

```

```

END DO
B1(1)=PLYZ(3,3)
B1(2)=PLYZ(4,3)
CALL SISTGAUSS(A1,B1,X)
K1=K1+1
K=K+1
SOLY(K)=X(1)
SOLZ(K1)=X(2)

```

c

c Entre los tres planos habremos obtenido 12 posibles valores para cada coordenada x, y, z,  
c luego se calcula la media y desviaciones típicas de ellos, para obtener las coordenadas x,y,z  
c promediadas de la sonda.

c

```

NUM=12.0
CALL MEYDEES (SOLX,NUM,MED,DEES,DESMED)
MEDX=MED
DEESX=DEES
DESMEDX=DESMED

```

```

CALL MEYDEES (SOLY,NUM,MED,DEES,DESMED)
MEDY=MED
DEESY=DEES
DESMEDY=DESMED

```

```

CALL MEYDEES (SOLZ,NUM,MED,DEES,DESMED)
MEDZ=MED
DEESZ=DEES
DESMEDZ=DESMED

```

c

c Se crea el archivo "POSONDA1.res", para guardar los valores obtenidos en el paso anterior  
c para las coordenadas x,y,z geocéntricas ecuatoriales rectangulares de la sonda.

c

```

9      FORMAT (/,a)
10     FORMAT (F15.5,4X,F15.5,4X,F15.5)
11     FORMAT (/,'Media de ',a/,1X,F15.5)
12     FORMAT ('Desviación estándar de ',a/,1X,F15.5)
13     FORMAT ('Desviación estándar de la media de ',a/,1X,F15.5,/)

```

```

OPEN (2, FILE= 'POSONDA1.RES')

```

```

DO K= 1, 12
  WRITE (2,10) SOLX(K),SOLY(K),SOLZ(K)
END DO
WRITE (2,11)'X:',MEDX
WRITE (2,12)'X:',DEESX
WRITE (2,13)'X:',DESMEDX
WRITE (2,11)'Y:',MEDY
WRITE (2,12)'Y:',DEESY
WRITE (2,13)'Y:',DESMEDY
WRITE (2,11)'Z:',MEDZ
WRITE (2,12)'Z:',DEESZ
WRITE (2,13)'Z:',DESMEDZ

```

```

CLOSE (2)

```

c

c Ahora ya tenemos calculada la posición de la sonda, expresada en coordenadas geocéntricas  
c ecuatoriales rectangulares. Sólo nos queda cambiar el sistema de coordenadas.

c

```

c
c Pasamos la posición de la sonda de coordenadas geocéntricas ecuatoriales rectangulares, a
c geocéntricas ecuatoriales esféricas.
c
      CALL REC_ESF (MEDX,MEDY,MEDZ,rG,AR,DEC)
c
c Calculamos la posición de la Tierra respecto del Sol, en el instante de la toma de la imagen
c del asteroide. Lo hacemos con la subrutina POSSOL que nos da las coordenadas del Sol
c respecto de la Tierra, por tanto, cambiando de signo estas coordenadas tendremos las de la
c Tierra respecto del Sol. Esta posición estará en coordenadas heliocéntricas ecuatoriales
c rectangulares.
c
      CALL POSSOL (D1,XECU,YECU,ZECU)
c
c Conocidas las coordenadas de la posición de la sonda respecto de la Tierra, y de la Tierra
c respecto del Sol, sumando ambas obtendremos las coordenadas de la sonda respecto del
c Sol.
c
      XHECU=MEDX-XECU
      YHECU=MEDY-YECU
      ZHECU=MEDZ-ZECU
c
c Calculamos el ángulo entre los planos ecuatorial y eclíptico en el instante de la captura de las
c imágenes de los asteroides. Entonces transformamos la posición de la sonda, obtenida en el
c paso anterior en coordenadas heliocéntricas ecuatoriales rectangulares, a coordenadas
c heliocéntricas eclípticas rectangulares. Por último, pasamos a las definitivas coordenadas
c heliocéntricas eclípticas  esféricas de la posición de la sonda (r, (, ()
c
      OBLECL=23.4393-D1*3.563E-7
      CALL ECU_ECL (XHECU,YHECU,ZHECU,OBLECL,XHECL,YHECL,ZHECL)
      CALL REC_ESF (XHECL,YHECL,ZHECL,rH,LONG,LAT)
c
c Una vez obtenida la posición de la sonda espacial dentro del Sistema c Solar, guardamos en
c el archivo "POSONDA2.res" sus coordenadas
c respecto de la Tierra, y las esféricas respecto del Sol
c
      OPEN (2, FILE= 'POSONDA2.RES')

14  FORMAT (/,a,/)
15  FORMAT (a,1X,F15.5)

      WRITE (2,14)'POSICION CALCULADA DE LA SONDA ESPACIAL'
      WRITE (2,14)'COORDENADAS GEOCENTRICAS RECTANGULARES:'
      WRITE (2,15)'XG (UA):',MEDX
      WRITE (2,15)'YG (UA):',MEDY
      WRITE (2,15)'ZG (UA):',MEDZ
      WRITE (2,14)'COORDENADAS GEOCENTRICAS ESFERICAS:'
      WRITE (2,15)'rG (UA):',rG
      WRITE (2,15)'AR (grados):',AR
      WRITE (2,15)'DEC (grados):',DEC
      WRITE (2,14)'COORDENADAS HELIOCENTRICAS ESFERICAS:'
      WRITE (2,15)'rH (UA):',rH
      WRITE (2,15)'Longitud (grados):',LONG
      WRITE (2,15)'Latitud (grados):',LAT

      CLOSE (2)
c
c Opción de repetir la ejecución del programa.
c
      WRITE(6,*)"

```



```

WRITE(6,*)'SI DESEA EJECUTAR EL PROGRAMA DE NUEVO PULSE 1'
READ(5,*) R
IF (R.EQ.1) THEN
  GO TO 1
END IF

STOP
END

```

## E.2. Código de las subrutinas y funciones del programa 2

```

c
c Subrutina que calcula las coordenadas rectangulares geocéntricas ecuatoriales de un
c asteroide a partir de sus elementos orbitales y de la fecha y hora de la toma de la imagen.
c
  SUBROUTINE POSGASTER (D1,D3,ELEM2,XG,YG,ZG)

    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
    PARAMETER (IM=9)
    DIMENSION ELEM2(IM)

c
c Cálculo de la posición del Sol en coordenadas rectangulares geocéntricas ecuatoriales.
c
    CALL POSSOL (D1,XSECU,YSECU,ZSECU)

c
c Cálculo de la posición del asteroide en coordenadas rectangulares heliocéntricas eclípticas.
c
    CALL POSPLANET (D3,ELEM2,XECL,YECL,ZECL)

c
c Cálculo del ángulo entre los planos ecuatorial y eclíptico para la fecha y hora de la toma de la
c imagen.
c
    ANG=23.4393-D1*3.563E-7

c
c Cálculo de la posición del asteroide en coord. rectangulares heliocéntricas ecuatoriales.
c
    CALL ECL_ECU (XECL,YECL,ZECL,ANG,XECU,YECU,ZECU)

c
c Cálculo de la posición del asteroide en coordenadas rectangulares geocéntricas ecuatoriales.
c
    XG=XSECU+XECU
    YG=YSECU+YECU
    ZG=ZSECU+ZECU

    RETURN
  END

c
c Subrutina que calcula las coordenadas rectangulares heliocéntricas eclípticas de un asteroide
c o planeta a partir de sus elementos orbitales y un día y hora.
c
  SUBROUTINE POSPLANET (D3,ELEM2,XECL,YECL,ZECL)

    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
    PARAMETER (PI=3.14159265358979323846)
    PARAMETER (IM=9)
    DIMENSION ELEM2(IM)

```

```

N=ELEM2(5)+D3*3.82394E-5
ECLi=ELEM2(6)
w=ELEM2(4)
a=ELEM2(9)
e=ELEM2(7)
M=ELEM2(3)+D3*ELEM2(8)

N=REV(N)
ECLi=REV(ECLi)
w=REV(w)
M=REV(M)

E0=M+e*(180.0/PI)*SING(M)*(1+e*COSG(M))
E1=E0-(E0-(180.0/PI)*e*SING(E0)-M)/(1-e*COSG(E0))

DIF=E0-E1
IF (DIF.LT.0.0) THEN
  DIF=(-1)*DIF
END IF

DO WHILE (DIF.GT.0.005)
  E0=E1
  E1=E0-(E0-(180.0/PI)*e*SING(E0)-M)/(1-e*COSG(E0))
  DIF=E0-E1
END DO

X=a*(COSG(E1)-e)
Y=a*(SING(E1)*SQRT(1-e*e))

r=SQRT(X*X+Y*Y)
v=ATANG2(Y,X)

XECL=r*(COSG(N)*COSG(v+w)-SING(N)*SING(v+w)*COSG(ECLi))
YECL=r*(SING(N)*COSG(v+w)+COSG(N)*SING(v+w)*COSG(ECLi))
ZECL=r*SING(v+w)*SING(ECLi)

RETURN
END

```

c

c Subrutina para calcular la posición geocéntrica del Sol para un día y hora dado en c coordenadas rectangulares geocéntricas ecuatoriales.

c

```

SUBROUTINE POSSOL (D1,XECU,YECU,ZECU)

```

```

  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
  PARAMETER (PI=3.14159265358979323846)

```

```

  w=282.9404+D1*4.70935E-5
  e=0.016709-D1*1.151E-9
  M=356.0470+D1*0.9856002585

```

```

  w=REV(w)
  M=REV(M)

```

```

  OBLECL=23.4393-D1*3.563E-7

```

```

  L= w + M
  L=REV(L)

```

```
E1=M+e*(180.0/PI)*SING(M)*(1+e*COSG(M))
```

```
X=COSG(E1)-e
```

```
Y=SING(E1)*SQRT(1-e*e)
```

```
r=SQRT(X*X+Y*Y)
```

```
v=ATANG2(Y,X)
```

```
LON=v+w
```

```
LON=REV(LON)
```

```
LAT=0.0
```

```
CALL ESF_REC (r,LON,LAT,XECL,YECL,ZECL)
```

```
CALL ECL_ECU (XECL,YECL,ZECL,OBLECL,XECU,YECU,ZECU)
```

```
RETURN
```

```
END
```

c

c Subrutina para calcular una posición en coordenadas rectangulares a partir de sus  
c coordenadas esféricas.

c

```
SUBROUTINE ESF_REC (r,AR,DEC,X,Y,Z)
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
```

```
X=r*COSG(DEC)*COSG(AR)
```

```
Y=r*COSG(DEC)*SING(AR)
```

```
Z=r*SING(DEC)
```

```
RETURN
```

```
END
```

c

c Subrutina para calcular una posición en coordenadas esféricas a partir de sus coordenadas  
c rectangulares.

c

```
SUBROUTINE REC_ESF (X,Y,Z,r,AR,DEC)
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
```

```
r= SQRT(X*X+Y*Y+Z*Z)
```

```
DEC= ATANG2(Z, SQRT(X*X+Y*Y))
```

```
IF ((X.EQ.0.0).AND.(Y.EQ.0.0)) THEN
```

```
  AR=0.0
```

```
ELSE
```

```
  AR=ATANG2(Y,X)
```

```
END IF
```

```
AR=REV(AR)
```

```
RETURN
```

```
END
```

c

c Subrutina que calcula una posición en coordenadas rectangulares eclípticas a partir de sus  
c coordenadas rectangulares ecuatoriales.

c

```
SUBROUTINE ECL_ECU (XECL,YECL,ZECL,ANG,XECU,YECU,ZECU)
```

```
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
```

```
    XECU=XECL
```

```
    YECU=YECL*COSG(ANG)-ZECL*SING(ANG)
```

```
    ZECU=YECL*SING(ANG)+ZECL*COSG(ANG)
```

```
    RETURN
```

```
    END
```

c

c Subrutina que calcula una posición en coordenadas rectangulares ecuatoriales a partir de sus  
c coordenadas rectangulares eclípticas.

c

```
SUBROUTINE ECU_ECL (XECU,YECU,ZECU,ANG,XECL,YECL,ZECL)
```

```
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

```
    XECL=XECU
```

```
    YECL=YECU*COSG(ANG)+ZECU*SING(ANG)
```

```
    ZECL=ZECU*COSG(ANG)-YECU*SING(ANG)
```

```
    RETURN
```

```
    END
```

c

c Subrutina que calcula los días Julianos transcurridos desde el 01-  
c 01-00 0.0h.

c

```
SUBROUTINE DIAJUL (IA,IM,D,H,D1)
```

```
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
```

```
    D1=367*IA-7*(IA+(IM+9)/12)/4+275*IM/9+D-730530
```

```
    D1=D1+H/24.0
```

```
    RETURN
```

```
    END
```

c

c Subrutina para calcular los coeficientes de la ecuación de una recta, dados dos puntos por  
c donde pasa.

c

```
SUBROUTINE RECTAVIS (XA,YA,XVG,YVG,A,B,C)
```

```
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
```

```
    RE1=YVG-YA
```

```
    RE2=XVG-XA
```

```
    A=-(RE1)
```

```
    B=RE2
```

```
    C=(RE1*(-XA))-(RE2*(-YA))
```

```

RETURN
END

```

c  
c Subrutina que resuelve un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss, en este  
c caso se usa para sistemas de 2 ecuaciones con dos incógnitas pero el código sería válido  
c para sistemas mayores sólo cambiando la definición de N=2 por un número mayor.

```

c
SUBROUTINE SISTGAUSS (A,B,X)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
PARAMETER (N= 2)
DIMENSION A(N, N), B(N), X(N)

DO I= 1, N-1

    PIVOT= 0.0
    IFILA= 0
    DO K=I, N
        IF (ABS (A(K, I)) .GT. ABS (PIVOT)) THEN
            PIVOT= A(K, I)
            IFILA= K
        END IF
    END DO

    IF (PIVOT .EQ. 0.0) THEN
        WRITE (*, *) 'PIVOT= 0 A LA FILA ', I
        STOP
    END IF

    AUX= B(I)
    B(I)= B(IFILA)
    B(IFILA)= AUX

    DO J= 1, N
        AUX= A(I, J)
        A(I, J)= A(IFILA, J)
        A(IFILA, J)= AUX
    END DO

    DO K= I+1, N
        XM= A(K, I)/PIVOT
        DO J= I+1, N
            A(K, J)= A(K, J)-XM*A(I, J)
        END DO
        B(K)= B(K)-XM*B(I)
    END DO

END DO

X(N)= B(N)/A(N, N)
DO I= N-1, 1, -1
    SUM= 0.
    DO J= I+1, N
        SUM= SUM + A(I, J)*X(J)
    END DO
    X(I)= (B(I)-SUM)/A(I, I)
END DO

```

```

RETURN
END

```

c  
c Subrutina para calcular la media, desviación estándar, y desviación estándar de la media, de  
c una serie de NUM números.

```

c
SUBROUTINE MEYDEES (DAT,NUM,MED,DEES,DESMED)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
DIMENSION DAT(NUM)

SUM=0.0
SUM2=0.0

DO I=1,NUM
SUM=SUM+DAT(I)
END DO

MED=SUM/NUM

DO I=1,NUM
SUM2=SUM2+((DAT(I)-MED)**2)
END DO

DEES=SQRT(SUM2/(NUM-1))

DESMED=DEES/(SQRT(NUM))

RETURN
END

```

c  
c Función para calcular el seno de un ángulo dado en grados.

```

c
FUNCTION SING (X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
PARAMETER (RADGRA=57.2957795130823)

SING = SIN (X*(1.0/RADGRA))
END

```

c  
c Función para calcular el coseno de un ángulo dado en grados.

```

c
FUNCTION COSG (X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,L-Z)
PARAMETER (RADGRA=57.2957795130823)

COSG = COS (X*(1.0/RADGRA))
END

```

c  
c Función que calcula el ángulo entre 0 y 360 grados equivalente a un ángulo dado.

```

c
FUNCTION REV (X)

```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,I-L-Z)
```

```
REV=X-AINT(X/360.0)*360.0
```

```
IF (REV.LT.0.0) REV=REV+360.0
```

```
END
```

C

c Función para calcular en el cuadrante correcto, el ángulo en grados formado por la recta del eje x positivo y la definida entre el origen y el punto dado por las coordenadas x e y.

C

```
FUNCTION ATANG2 (Y,X)
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,I-L-Z)
```

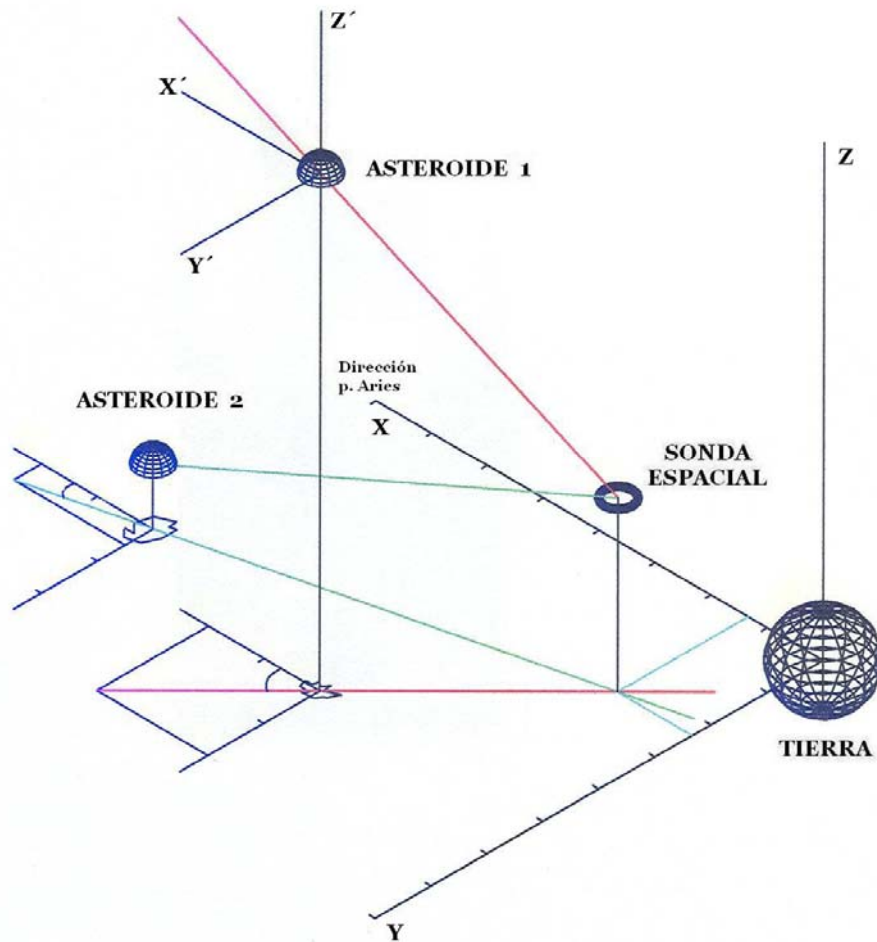
```
PARAMETER (RADGRA=57.2957795130823)
```

```
ATANG2 = RADGRA * ATAN2 (Y,X)
```

```
END
```

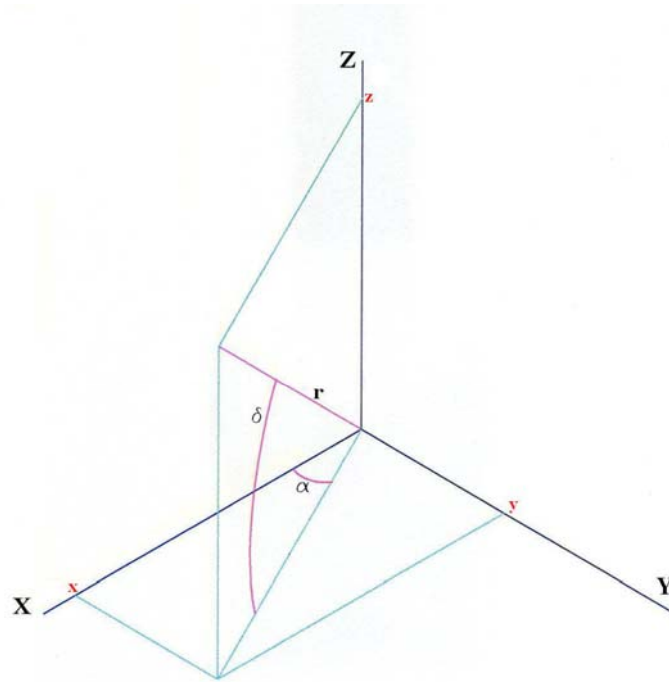
### E.3. Determinación de las líneas de visión tridimensionales

El método de cálculo de la posición de la sonda espacial que se aplica en este programa 2, se basa en la determinación de las líneas de visión de los asteroides usados como guía, tal como se explicó en el capítulo 5, y para ello el programa calcula las direcciones de estas líneas de visión de la manera que se explica a continuación. En la siguiente figura se representan las posiciones de la Tierra, la sonda, y dos asteroides con sus líneas de visión desde la sonda, y sus proyecciones sobre el plano xy.



En el ejemplo en dos dimensiones que se vio en el capítulo 5, la dirección de las líneas de visión quedaba determinada por un ángulo  $\alpha_1$  o  $\alpha_2$  que representábamos sobre los ejes de coordenadas  $(x', y')$  y  $(x'', y'')$ , ahora de una forma análoga para el caso en tres dimensiones, hemos incluido unos ejes  $(x', y', z')$  sobre el asteroide 1 del dibujo de la figura anterior, para que a partir de ellos se pueda definir la dirección de la línea de visión del asteroide 1 visto desde la sonda. En general, para determinar una dirección en el espacio tridimensional habrá que dar dos ángulos, en nuestro caso particular estos serán los de ascensión recta y declinación del asteroide vistos desde la sonda y determinados con el procedimiento del capítulo 4 y el programa 1. Además esta misma dirección se podrá expresar dando las coordenadas de dos puntos del espacio como se hizo en el caso bidimensional del capítulo 5, con la diferencia de que allí los puntos se daban con dos valores  $(x, y)$ , y ahora se darán con tres valores  $(x, y, z)$  pues tenemos una dimensión más. En la figura siguiente se ve la equivalencia para indicar una dirección tridimensional con dos ángulos medidos desde el origen, o con la dirección entre este y un punto  $(x, y, z)$ .





En la figura anterior, conoceríamos los dos ángulos de ascensión recta y declinación del asteroide medidos desde la sonda  $(\alpha, \delta)$ , mientras que la longitud  $r$  no sería conocida y la podríamos considerar  $r = 1$  sin que afecte a nuestro propósito, ya que sólo nos interesa determinar la dirección hacia la que se encuentra el asteroide, entonces de la figura podemos deducir la dirección definida por la recta que va desde el origen hasta el punto de coordenadas  $(x, y, z)$ , donde estas tres coordenadas vendrán dadas por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha) \\y &= r \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha) \\z &= r \cdot \sin(\delta)\end{aligned}$$

por lo que vemos que a partir de los ángulos de ascensión recta y declinación de un asteroide medidos desde la sonda podremos determinar la dirección tridimensional de su línea de visión igual que se hizo en el caso bidimensional.

Si conocemos las coordenadas  $(x, y, z)$  podremos hacer el caso inverso al anterior, y deducir de la figura los dos ángulos de ascensión recta y declinación que definen esa dirección

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}\right)$$

#### E.4. Base de datos de asteroides utilizada por el programa 2

En el programa 2 de este anexo se ha usado el archivo data2.dat, que contiene los elementos orbitales de 100 asteroides dados por el Minor Planet Center para la época del 30 de enero de 2005. Los datos de este archivo son los que se incluyen en la tabla E.1, donde todos los ángulos están dados en grados.

**Tabla E.1** Contenido del archivo data2.dat usado en el programa 2

Nº de orden	Magnitud Absoluta H	Anomalia Media M	Argumento del Perihelio $\omega$	Longitud Nodo Ascendente $\Omega$	Inclinac. i	Excentr. e	Movimiento Diario n (°/año)	Semieje Mayor a (UA)
1	3,34	43,77971	73,72889	80,42334	10,58276	0,08009	0,2141	2,7673
2	4,13	28,7017	310,54489	173,16605	34,85083	0,23022	0,21341	2,77324
3	5,33	300,24991	247,86205	170,12682	12,97175	0,2584	0,22615	2,66815
4	3,2	124,20649	150,2738	103,93117	7,13271	0,08885	0,27155	2,36177
5	6,85	122,79451	357,52667	141,68869	5,36966	0,19314	0,23885	2,57269
6	5,71	169,94839	239,24257	138,81775	14,75521	0,20107	0,26068	2,427
7	5,51	189,25529	145,42822	259,73022	5,52597	0,23102	0,2675	2,38555
8	6,49	66,04403	284,9552	111,03268	5,88699	0,15633	0,3018	2,20117
9	6,28	327,63428	5,49406	68,97805	5,57615	0,12174	0,26732	2,38662
10	5,43	309,58896	313,23676	283,59055	3,83965	0,11919	0,17716	3,13967
11	6,55	24,90092	195,41161	125,63639	4,62425	0,09985	0,25657	2,45279
12	7,24	135,90826	69,7172	235,54826	8,36307	0,22076	0,27645	2,33377
13	6,74	27,41478	81,45854	43,29962	16,53999	0,08487	0,23832	2,57648
14	6,3	13,97846	96,39604	86,47212	9,10602	0,16854	0,23705	2,58567
15	5,28	171,66312	97,66427	293,34964	11,73095	0,18618	0,22903	2,6457
16	5,9	343,14502	228,02145	150,35214	3,09543	0,13953	0,19745	2,92073
17	7,76	63,80037	135,9232	125,62153	5,58681	0,13412	0,25385	2,47034
18	6,51	233,56026	228,00299	150,54131	10,12562	0,21845	0,28341	2,29543
19	7,13	294,26187	182,06598	211,37482	1,57324	0,15936	0,25833	2,44165
20	6,5	188,01698	255,5797	206,52184	0,7067	0,14316	0,26366	2,40864
21	7,35	75,39345	250,22691	80,91732	3,06438	0,16382	0,25938	2,43504
22	6,45	243,79546	356,31274	66,24549	13,71049	0,10288	0,19873	2,90824
23	6,95	213,01126	59,30616	67,23645	10,14454	0,23329	0,23141	2,62751
24	7,08	150,39172	107,97416	35,98118	0,76009	0,13269	0,17805	3,12926
25	7,83	234,45087	90,15017	214,27808	21,57826	0,25608	0,26507	2,40009
26	7,5	1,94182	192,92065	45,88452	3,56228	0,08703	0,22773	2,65574
27	7	349,64877	356,55273	94,81254	1,58363	0,1714	0,27413	2,34689
28	7,09	247,67325	342,48492	144,51389	9,4012	0,14857	0,21276	2,77894
29	5,85	109,46314	63,00725	356,54425	6,10111	0,07146	0,24121	2,55585
30	7,57	61,49523	86,13244	307,92474	2,0983	0,12691	0,27094	2,36528
31	6,74	251,04854	62,06426	31,24281	26,31641	0,22621	0,17633	3,14963
32	7,56	240,15327	339,83102	220,57837	5,53035	0,08243	0,23689	2,58686
33	8,55	6,65805	338,29147	8,61191	1,87039	0,33749	0,20312	2,86614
34	8,51	43,3051	330,42627	184,53435	5,50351	0,10894	0,22384	2,68645

35	8,5	303,84451	214,17432	353,84726	7,94095	0,22843	0,19065	2,9898
36	8,46	255,38562	47,20413	358,47549	18,43264	0,30346	0,21656	2,74629
37	7,29	228,46741	62,81269	7,4131	3,07376	0,17677	0,22968	2,64069
38	8,32	315,93686	168,41998	295,94223	6,95442	0,15159	0,2171	2,74179
39	6,1	268,35016	209,67899	157,17403	10,38418	0,11389	0,21406	2,7677
40	7	46,96242	269,05756	94,30512	4,25538	0,04706	0,28871	2,26722
41	7,12	97,60961	46,14705	178,17271	15,76742	0,27175	0,21432	2,76541
42	7,53	301,08414	236,60336	84,40313	8,529	0,22257	0,25833	2,4417
43	7,93	11,2138	15,91172	264,94525	3,46738	0,16767	0,30138	2,20323
44	7,03	165,25063	342,50082	131,60933	3,70302	0,14886	0,26131	2,42304
45	7,46	339,33475	85,14763	147,94991	6,61002	0,0826	0,21955	2,72133
46	8,36	233,59303	176,75954	181,16428	2,34223	0,1718	0,24551	2,52596
47	7,84	83,55644	314,71021	3,25839	4,98423	0,13496	0,20179	2,87877
48	6,9	209,96603	257,99789	183,75583	6,55464	0,07505	0,17984	3,10852
49	7,8	19,79954	110,18358	286,19894	3,18035	0,23383	0,18188	3,08519
50	9,24	50,98358	199,9512	173,78938	2,83497	0,2866	0,22859	2,64909
51	7,35	127,35885	2,53908	176,17577	9,97219	0,06667	0,2709	2,36555
52	6,31	16,89935	343,18326	129,01878	7,469	0,10137	0,18072	3,09835
53	8,81	295,46127	312,17499	143,83311	5,15412	0,20414	0,23252	2,61919
54	7,66	309,42334	345,47955	313,46216	11,8048	0,19628	0,22069	2,71194
55	7,8	324,28101	4,3928	10,54741	7,18518	0,14473	0,21508	2,75893
56	8,31	102,69353	103,68245	193,48692	8,07157	0,23784	0,23569	2,59566
57	7,03	304,40503	213,04311	199,34416	15,20024	0,11849	0,1763	3,14998
58	8,86	219,96698	34,07352	161,30112	5,05788	0,04295	0,22213	2,70021
59	7,93	93,37959	210,13031	170,31067	8,64357	0,11818	0,22059	2,71278
60	8,21	264,86661	270,38242	191,80556	3,60193	0,18226	0,26611	2,39386
61	7,68	355,35461	13,91195	333,78711	18,21919	0,16766	0,19135	2,98253
62	8,76	36,72142	273,17981	125,75645	2,22347	0,17911	0,1788	3,12048
63	7,55	197,0627	295,86765	337,95114	5,78833	0,1264	0,26592	2,39501
64	7,67	311,15311	179,16782	309,42709	1,30745	0,1233	0,22432	2,68263
65	6,62	171,40196	105,59592	155,81818	3,54766	0,1045	0,15481	3,43504
66	9,36	268,67441	43,8469	7,67238	3,04768	0,17345	0,22913	2,64493
67	8,28	359,07538	106,32242	202,72832	6,02696	0,18453	0,26158	2,42137
68	6,78	236,25421	305,12137	44,18281	7,96965	0,18498	0,21211	2,78457
69	7,05	22,64517	290,01349	185,17981	8,58884	0,16499	0,19157	2,98029
70	8,11	298,33432	255,75818	47,80547	11,58414	0,1811	0,23291	2,6162
71	7,3	222,94194	267,43872	316,11823	23,25585	0,17609	0,21559	2,75455
72	8,94	304,77393	102,55785	208,14108	5,4173	0,12026	0,28893	2,26608
73	9	58,03283	52,68864	7,29593	2,37756	0,04125	0,22663	2,66437
74	8,66	247,82384	174,51572	197,31293	4,07507	0,23949	0,21286	2,77806
75	8,96	228,90591	339,25571	359,53137	5,00986	0,30516	0,22511	2,67634
76	7,9	189,82375	254,26375	204,54607	2,11599	0,1636	0,15615	3,41544
77	8,52	188,16731	61,60236	1,33259	2,43311	0,13257	0,2262	2,66771
78	8,09	191,13429	151,43294	333,59433	8,68976	0,20771	0,23244	2,61974
79	7,96	328,97931	200,36554	206,80203	4,6225	0,19242	0,25786	2,44465
80	7,98	64,54374	139,14957	218,82512	8,66469	0,20109	0,28341	2,29539
81	8,48	6,52332	50,09378	1,50865	7,81444	0,21134	0,20452	2,85311
82	8,4	140,95694	110,41199	25,63038	2,83371	0,22496	0,2151	2,75872
83	8,66	319,49408	167,65079	27,80462	4,96673	0,0819	0,25987	2,43201
84	9,32	136,15266	14,54889	327,7442	9,34361	0,23765	0,27163	2,36128
85	7,61	115,60141	122,35184	203,44391	11,96658	0,19288	0,22814	2,65258
86	8,54	141,32268	306,29568	86,82833	4,79823	0,20445	0,17846	3,12445
87	6,94	23,05632	266,12619	73,33509	10,85531	0,07961	0,15115	3,49037
88	7,04	15,61695	36,63219	276,77811	5,21756	0,16436	0,21402	2,76804
89	6,6	319,66589	45,08235	311,65881	16,14048	0,18362	0,24203	2,5501
90	8,27	313,23392	242,45285	70,23479	2,21979	0,15585	0,17581	3,15583
91	8,84	18,84317	72,59816	10,89342	2,11303	0,10445	0,23643	2,59023

92	6,61	356,10849	242,35928	101,84357	9,92074	0,10024	0,17295	3,19045
93	7,7	75,2921	275,71237	4,16544	8,55723	0,14107	0,21551	2,75525
94	7,57	117,69834	59,17871	2,81932	7,98058	0,08421	0,17492	3,16649
95	7,84	198,4744	155,04373	243,14957	12,99517	0,14831	0,18339	3,06816
96	7,67	226,02216	206,7533	321,82648	15,93561	0,13194	0,18422	3,05901
97	7,63	215,90398	268,76346	159,77831	11,78454	0,25705	0,22624	2,66741
98	8,84	41,87277	158,70932	354,14215	15,61537	0,18988	0,22397	2,68537
99	9,43	145,65729	195,94067	41,68222	13,85795	0,19657	0,22658	2,66471
100	7,67	21,66965	185,91399	127,35116	6,4298	0,16476	0,18114	3,09354

## E.5. Información adicional sobre los asteroides

En la siguiente tabla E.2 se dan algunos datos adicionales sobre los 100 asteroides utilizados en el programa 2 de este anexo. Estos datos, corresponden a los que han sido utilizados por el Minor Planet Center para establecer las órbitas.

**Tabla E.2** Datos adicionales de los 100 asteroides utilizados en el programa 2

Nº de orden	Nº de observaciones	Nº de oposiciones	Año primera observación	Año última observación	Nombre asignado
1	4676	62	1839	1994	Ceres
2	5482	63	1839	1993	Pallas
3	4741	65	1839	1993	Juno
4	5168	56	1841	1993	Vesta
5	2178	100	1845	2002	Astraea
6	3581	59	1869	1994	Hebe
7	3313	57	1850	1993	Iris
8	2438	102	1847	2000	Flora
9	2131	96	1822	2001	Metis
10	2261	104	1849	1999	Hygiea
11	2613	61	1850	1993	Parthenope
12	2635	86	1850	2003	Victoria
13	946	54	1850	2000	Egeria
14	1765	84	1851	2000	Irene
15	2071	91	1851	2001	Eunomia
16	1831	96	1852	1998	Psyche
17	869	73	1853	1999	Thetis
18	4910	95	1852	2003	Melpomene
19	2354	94	1852	2003	Fortuna
20	1670	96	1852	2001	Massalia
21	814	58	1866	2000	Lutetia
22	1675	90	1852	2003	Kalliope
23	888	67	1852	2000	Thalia
24	1795	108	1853	2003	Themis
25	1300	68	1853	1993	Phocaea
26	1192	105	1853	2003	Proserpina
27	1618	79	1853	2000	Euterpe
28	1939	113	1854	2003	Bellona
29	2260	101	1825	2003	Amphitrite
30	1395	82	1854	2003	Urania
31	1277	68	1854	2002	Euphrosyne
32	524	81	1854	1993	Pomona
33	635	73	1854	2001	Polyhymnia

34	1166	71	1855	2003	Circe
35	1097	72	1855	2003	Leukothea
36	120	25	1871	1999	Atalante
37	1399	97	1855	1996	Fides
38	960	58	1856	2003	Leda
39	3843	90	1856	1996	Laetitia
40	3339	81	1856	1996	Harmonia
41	618	67	1856	1997	Daphne
42	1078	79	1856	2000	Isis
43	882	78	1857	1994	Ariadne
44	1410	81	1857	2000	Nysa
45	1174	85	1857	2002	Eugenia
46	741	82	1857	1992	Hestia
47	515	79	1857	1993	Aglaja
48	712	88	1857	1999	Doris
49	458	55	1863	2000	Pales
50	382	49	1857	1993	Virginia
51	3595	87	1858	1997	Nemausa
52	1231	82	1858	1994	Europa
53	239	48	1869	2000	Kalypso
54	544	63	1858	2002	Alexandra
55	981	69	1858	2001	Pandora
56	998	77	1857	2003	Melete
57	1416	106	1859	2001	Mnemosyne
58	423	81	1860	1998	Concordia
59	896	80	1860	2003	Elpis
60	434	64	1860	1994	Echo
61	230	39	1865	2000	Danae
62	229	41	1910	1996	Erato
63	940	76	1861	1998	Ausonia
64	197	45	1894	1993	Angelina
65	1416	103	1861	2002	Cybele
66	373	53	1861	1999	Maja
67	412	63	1861	1994	Asia
68	1282	93	1861	2003	Leto
69	449	69	1861	1993	Hesperia
70	276	43	1866	2000	Panopaea
71	292	41	1864	2000	Niobe
72	805	61	1862	2003	Feronia
73	219	47	1862	1993	Klytia
74	206	34	1908	1994	Galatea
75	950	49	1864	2005	Eurydike
76	450	67	1862	1993	Freia
77	494	57	1862	1995	Frigga
78	223	37	1870	1994	Diana
79	844	78	1863	1991	Eurynome
80	1282	67	1864	2003	Sappho
81	189	45	1864	1992	Terpsichore
82	1251	84	1864	2003	Alkmene
83	246	56	1865	1993	Beatrix
84	452	58	1865	1999	Klio
85	946	71	1865	2002	Io
86	305	44	1871	2000	Semele
87	666	73	1866	1997	Sylvia
88	998	68	1866	1997	Thisbe
89	722	59	1866	1995	Julia
90	1015	86	1866	2003	Antiope

91	386	66	1866	1993	Aegina
92	300	58	1871	1999	Undina
93	720	65	1867	2003	Minerva
94	275	62	1867	1993	Aurora
95	425	68	1867	2000	Arethusa
96	110	27	1870	1995	Aegle
97	945	66	1868	2001	Klotho
98	317	50	1868	2001	Ianthe
99	98	27	1915	1998	Dike
100	263	71	1868	1996	Hekate

## E.6. Posiciones geocéntricas calculadas de los asteroides

La tabla E.3 que ponemos a continuación, contiene el resultado del archivo “POSGEOC.res” creado por el programa 2 que se trata en este anexo, en ella están las coordenadas rectangulares  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y esféricas  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  de la posición geocéntrica ecuatorial de cada asteroide, estas se calculan en el programa a partir de los datos del archivo “data2.dat” que son los que contiene la tabla E.1.

**Tabla E.3** Coordenadas de posición de cada asteroide de la tabla E.1

Nº de orden	$X_G$ (UA)	$Y_G$ (UA)	$Z_G$ (UA)	$r$ (UA)	$\alpha$ (°)	$\delta$ (°)
1	-1,25773	-1,19882	-0,26606	1,75779	223,62609	-8,70572
2	-1,92416	-0,11256	0,7291	2,06074	183,34787	20,72018
3	2,52137	1,04263	0,32445	2,74766	22,46602	6,78144
4	1,83354	2,87236	0,98292	3,54661	57,44829	16,08974
5	1,85519	-1,59273	-0,57321	2,51139	319,35302	-13,19369
6	-2,00892	-0,77931	0,43277	2,19781	201,20266	11,35631
7	-0,4944	-1,60427	-0,73412	1,83223	252,87198	-23,62017
8	-1,72581	1,71014	0,92108	2,59834	135,26141	20,76201
9	0,943	2,70863	1,19412	3,10675	70,80461	22,60432
10	-2,27959	0,05349	-0,18171	2,28744	178,65584	-4,55625
11	2,44338	1,90326	0,62255	3,15913	37,91663	11,36537
12	-0,94926	3,29899	1,03029	3,58412	106,05283	16,70597
13	-2,02804	0,3057	0,56063	2,1262	171,4279	15,28824
14	-0,75317	-1,03817	-0,27611	1,31198	234,04013	-12,14877
15	-1,80262	-0,87964	-1,02619	2,25305	206,01147	-27,0949
16	2,59905	1,97642	0,73239	3,3463	37,25082	12,64238
17	2,85253	1,38534	0,35622	3,19107	25,90363	6,40933
18	0,05322	-1,46347	-0,20298	1,47843	272,08261	-7,89127
19	2,45415	0,38668	0,21306	2,49354	8,95399	4,9016
20	2,18987	-0,96342	-0,38292	2,42288	336,25319	-9,09326
21	0,16779	3,23527	1,43806	3,54446	87,03121	23,93633
22	2,50728	-0,63031	-0,99956	2,7718	345,88867	-21,13812
23	3,26939	0,48342	-0,36079	3,32457	8,41092	-6,23005
24	2,98249	-1,30618	-0,61643	3,31381	336,34905	-10,72056
25	-2,16227	0,86259	-0,16285	2,33367	158,2515	-4,0015
26	0,51392	-1,33883	-0,70337	1,59728	290,99985	-26,12643
27	-0,72135	2,38213	1,06125	2,70577	106,84715	23,09266
28	2,93692	2,02035	0,4471	3,59266	34,52471	7,14887
29	-2,11375	-0,04552	-0,15919	2,12022	181,23361	-4,30603

30	-1,54812	2,23603	0,94545	2,8793	124,69698	19,1693
31	3,31668	0,50368	-1,0144	3,50472	8,63506	-16,82427
32	-0,06101	3,30567	1,19809	3,51662	91,05741	19,9192
33	1,84263	2,31848	1,05366	3,14338	51,52385	19,58465
34	-1,04442	-1,22563	-0,31345	1,6405	229,5639	-11,01522
35	-1,90563	1,73475	0,86488	2,71823	137,6875	18,55271
36	1,45388	-1,08763	-1,36333	2,27055	323,20022	-36,90163
37	2,10377	-1,12325	-0,62924	2,46647	331,90128	-14,78056
38	0,77462	2,92159	1,44974	3,35223	75,15049	25,62438
39	1,22173	-1,576	-0,28821	2,01481	307,783	-8,22409
40	0,35404	2,94149	1,26264	3,22055	83,13682	23,08255
41	3,61791	1,3883	0,41769	3,89758	20,99333	6,15195
42	0,62496	-0,92365	-0,47375	1,21167	304,08295	-23,01629
43	2,2847	0,33034	0,27239	2,32448	8,22737	6,72964
44	2,02114	-1,18159	-0,49518	2,39298	329,68874	-11,94254
45	-0,87849	-1,21609	-0,214	1,51539	234,15606	-8,1183
46	-0,86409	-1,32021	-0,46908	1,6461	236,79481	-16,55675
47	0,91719	3,49914	1,79691	4,03907	75,31218	26,41579
48	2,32906	-1,63389	-0,36857	2,86879	324,94943	-7,38148
49	-0,09752	3,24747	1,42479	3,54762	91,72007	23,67941
50	-1,18486	2,94484	1,16657	3,38185	111,91743	20,1788
51	2,74694	0,08009	0,15882	2,75269	1,67009	3,30763
52	-2,2953	1,75094	0,96083	3,0426	142,66228	18,40874
53	2,02423	2,31751	0,78992	3,17684	48,86437	14,39759
54	0,12625	-1,01848	-0,82758	1,31838	277,0661	-38,88224
55	2,73451	0,94712	0,36023	2,91622	19,104	7,09559
56	0,63626	3,8071	1,2051	4,04365	80,51212	17,33887
57	3,18384	1,25088	0,68559	3,48878	21,44905	11,33317
58	0,95617	3,41752	1,21893	3,75226	74,36925	18,95662
59	-2,17277	2,1959	0,79631	3,19014	134,69661	14,4547
60	2,51673	1,53878	0,64858	3,02033	31,44244	12,40015
61	2,78134	1,14004	1,04277	3,18165	22,28812	19,13184
62	-0,92954	3,2615	1,39419	3,66677	105,90781	22,34747
63	-1,41422	2,57226	1,2366	3,18524	118,80185	22,84432
64	-0,06761	3,00511	1,33147	3,28756	91,28877	23,89121
65	0,39453	4,42312	1,68364	4,74914	84,90288	20,76367
66	2,50768	-0,30758	-0,22564	2,53653	353,0072	-5,10366
67	2,41305	0,58928	0,3735	2,51188	13,72332	8,55122
68	-1,48373	-1,21632	-0,5811	2,00463	219,34386	-16,85054
69	-2,3119	1,04101	0,38463	2,56447	155,75867	8,62593
70	-0,1998	-1,0421	-0,68375	1,2623	259,14659	-32,79745
71	-0,0143	3,19082	2,22794	3,8917	90,25674	34,9238
72	0,86989	-0,99018	-0,22769	1,33754	311,29985	-9,80119
73	-1,93373	2,0609	0,96645	2,98674	133,17663	18,87958
74	-0,21916	-1,80086	-0,58458	1,90601	263,06149	-17,86077
75	-2,41903	-0,27733	-0,2463	2,4473	186,54005	-5,77606
76	2,31716	-2,31201	-0,84512	3,38066	315,06381	-14,47678
77	0,39625	-1,8054	-0,92011	2,06472	282,37902	-26,46384
78	3,0787	-0,46554	-0,21869	3,12137	351,40122	-4,01765
79	1,71422	2,21257	0,89921	2,93983	52,23274	17,81071
80	-0,76381	2,97508	0,89489	3,19927	104,39897	16,24325
81	0,01429	2,87971	1,5988	3,2938	89,71559	29,03853
82	2,41397	-1,51912	-0,83626	2,97226	327,81769	-16,34103
83	-1,85948	0,67419	0,37595	2,01334	160,07077	10,76202
84	-2,27463	2,0187	0,80872	3,14692	138,41136	14,8914
85	-1,14369	3,52212	0,83308	3,7957	107,98953	12,67846
86	-3,10419	-0,50263	0,09237	3,14597	189,19752	1,68259

87	3,25682	2,43337	0,56727	4,10487	36,76571	7,94333
88	2,79169	1,13934	0,7381	3,10426	22,20122	13,75504
89	2,30979	0,07963	0,33748	2,33568	1,97454	8,30772
90	0,73311	-1,59642	-0,74527	1,90825	294,66561	-22,98865
91	-1,49615	2,25817	1,05426	2,90676	123,52654	21,26555
92	3,20343	1,27888	0,01626	3,44931	21,76304	0,27016
93	2,69407	2,32125	1,25408	3,7708	40,74868	19,42521
94	-2,6513	-0,43225	-0,3932	2,71493	189,25959	-8,32748
95	-0,86881	-2,10768	-0,82706	2,42511	247,59805	-19,94025
96	2,64614	2,48364	2,03982	4,1631	43,18565	29,33899
97	1,40599	-1,96403	-0,31984	2,4365	305,59767	-7,54311
98	-0,78921	-0,91625	-1,10767	1,63991	229,25988	-42,48883
99	2,30931	3,12209	1,51279	4,1676	53,51083	21,28382
100	3,06857	1,48614	0,33936	3,42636	25,84139	5,68405

## E.7. Ejecución del programa 2 en el capítulo 6

Hasta aquí toda la información incluida en este anexo es general para cualquier caso en el que quisiésemos utilizar este programa 2, pero ahora veremos la aplicación del programa para un caso concreto. En el capítulo 6 se ejecuta este programa para un ejemplo concreto, por lo que incluimos aquí los resultados obtenidos en ese capítulo, pero con más detalle. Como se puede ver en el código del programa 2, no se usa tanto la pantalla y el teclado para obtener y mostrar datos como se hacía en el programa 1, ya que el volumen de datos tratados en este caso es mucho mayor, por lo que ahora habrán menos capturas de pantalla, y en su lugar habrá archivos como los incluidos arriba y los que incluimos a continuación.

Por pantalla y teclado se dan los datos que se ven en las siguientes capturas de pantalla;

```
FECHA Y HORA UTC DE LA TOMA DE IMAGENES:
ANO:
2005
MES:
05
DIA:
30
HORA <UTC>:
0.0
```

```
POSICION ESTIMADA DE LA Sonda EN COORDENADAS RECTANGULARES GEOCENTRICAS:
X:
-1.38812489
Y:
-0.505236077
Z:
0.260472263
```



```

Coordenadas de AR y DEC del asteroide 1 medidas desde la sonda:
AR?
203.7958
Declinacion?
14.2009

Coordenadas de AR y DEC del asteroide 2 medidas desde la sonda:
AR?
143.7215
Declinacion?
35.1863

Coordenadas de AR y DEC del asteroide 3 medidas desde la sonda:
AR?
280.6058
Declinacion?
-36.6977

Coordenadas de AR y DEC del asteroide 4 medidas desde la sonda:
AR?
147.6134
Declinacion?
-26.0957

```

## E.8. Ordenamiento de los asteroides por distancia

La tabla E.4 contiene el resultado del archivo "ORDENDIST.res" creado por el programa 2 para el caso concreto que se ha calculado en el capítulo 6 de este trabajo, en ella se ordenan los 100 asteroides por distancia a la posición estimada de la sonda, los más cercanos son los primeros de la tabla. La primera columna indica el número de orden de los asteroides ordenados, luego no coincide con el número de orden de las tablas E.1, E.2, E.3, que en este caso, es el número que aparece en la última columna.

**Tabla E.4** Contenido del archivo "ORDENDIST.res" para el caso calculado

Orden por distancia	X <sub>G</sub> (UA)	Y <sub>G</sub> (UA)	Z <sub>G</sub> (UA)	r (UA)	α (°)	δ (°)	Distancia a la sonda (UA)	Nº de orden previo
1	-2,00892	-0,77931	0,43277	2,19781	201,2026	11,35631	0,70014	6
2	-1,92416	-0,11256	0,7291	2,06074	183,3478	20,72018	0,81311	2
3	-1,25773	-1,19882	-0,26606	1,75779	223,6260	-8,70572	0,88051	1
4	-2,11375	-0,04552	-0,15919	2,12022	181,2336	-4,30603	0,95603	29
5	-1,04442	-1,22563	-0,31345	1,6405	229,5639	-11,0152	0,9831	34
6	-0,75317	-1,03817	-0,27611	1,31198	234,0401	-12,1487	0,98747	14
7	-0,87849	-1,21609	-0,214	1,51539	234,1560	-8,1183	0,99507	45
8	-2,02804	0,3057	0,56063	2,1262	171,4279	15,28824	1,07573	13
9	-1,48373	-1,21632	-0,5811	2,00463	219,3438	-16,8505	1,1059	68
10	-2,27959	0,05349	-0,18171	2,28744	178,6558	-4,55625	1,14123	10
11	-2,41903	-0,27733	-0,2463	2,4473	186,5400	-5,77606	1,17112	75
12	-0,86409	-1,32021	-0,46908	1,6461	236,7948	-16,5567	1,21287	46
13	-1,85948	0,67419	0,37595	2,01334	160,0707	10,76202	1,27537	83
14	-1,80262	-0,87964	-1,02619	2,25305	206,0114	-27,0949	1,40267	15

15	-2,6513	-0,43225	-0,3932	2,71493	189,2595	-8,32748	1,42416	94
16	-0,78921	-0,91625	-1,10767	1,63991	229,2598	-42,4888	1,54901	98
17	-0,1998	-1,0421	-0,68375	1,2623	259,1465	-32,7974	1,60994	70
18	-2,16227	0,86259	-0,16285	2,33367	158,2515	-4,0015	1,62771	25
19	-3,10419	-0,50263	0,09237	3,14597	189,1975	1,68259	1,72428	86
20	-0,4944	-1,60427	-0,73412	1,83223	252,8719	-23,6201	1,73085	7
21	0,05322	-1,46347	-0,20298	1,47843	272,0826	-7,89127	1,79178	18
22	-2,3119	1,04101	0,38463	2,56447	155,7586	8,62593	1,80545	69
23	0,12625	-1,01848	-0,82758	1,31838	277,0661	-38,8822	1,93407	54
24	-0,21916	-1,80086	-0,58458	1,90601	263,061	-17,8607	1,93887	74
25	-0,86881	-2,10768	-0,82706	2,42511	247,5980	-19,9402	2,00505	95
26	0,62496	-0,92365	-0,47375	1,21167	304,0829	-23,0162	2,18327	42
27	0,51392	-1,33883	-0,70337	1,59728	290,9998	-26,1264	2,28946	26
28	-1,72581	1,71014	0,92108	2,59834	135,2614	20,76201	2,33631	8
29	0,86989	-0,99018	-0,22769	1,33754	311,2998	-9,80119	2,36053	72
30	-1,90563	1,73475	0,86488	2,71823	137,6875	18,55271	2,37711	35
31	0,39625	-1,8054	-0,92011	2,06472	282,3790	-26,4638	2,50364	77
32	-2,2953	1,75094	0,96083	3,0426	142,6622	18,40874	2,53057	52
33	0,73311	-1,59642	-0,74527	1,90825	294,6656	-22,9886	2,58879	90
34	-1,93373	2,0609	0,96645	2,98674	133,1766	18,87958	2,71683	73
35	-2,27463	2,0187	0,80872	3,14692	138,4113	14,8914	2,7307	84
36	-1,54812	2,23603	0,94545	2,8793	124,6969	19,1693	2,83008	30
37	-2,17277	2,1959	0,79631	3,19014	134,6966	14,4547	2,86338	59
38	1,22173	-1,576	-0,28821	2,01481	307,783	-8,22409	2,87384	39
39	-1,49615	2,25817	1,05426	2,90676	123,5265	21,26555	2,87718	91
40	-0,72135	2,38213	1,06125	2,70577	106,8471	23,09266	3,06964	27
41	1,40599	-1,96403	-0,31984	2,4365	305,5976	-7,54311	3,20498	97
42	-1,41422	2,57226	1,2366	3,18524	118,8018	22,84432	3,2287	63
43	1,45388	-1,08763	-1,36333	2,27055	323,2002	-36,9016	3,32459	36
44	1,85519	-1,59273	-0,57321	2,51139	319,3530	-13,1936	3,5209	5
45	2,02114	-1,18159	-0,49518	2,39298	329,6887	-11,9425	3,5569	44
46	-1,18486	2,94484	1,16657	3,38185	111,9174	20,1788	3,57286	50
47	-0,76381	2,97508	0,89489	3,19927	104,3989	16,24325	3,59233	80
48	2,10377	-1,12325	-0,62924	2,46647	331,9012	-14,7805	3,65607	37
49	2,18987	-0,96342	-0,38292	2,42288	336,2531	-9,09326	3,66414	20
50	2,30979	0,07963	0,33748	2,33568	1,97454	8,30772	3,74467	89
51	2,2847	0,33034	0,27239	2,32448	8,22737	6,72964	3,76669	43
52	-0,06761	3,00511	1,33147	3,28756	91,28877	23,89121	3,90043	64
53	0,01429	2,87971	1,5988	3,2938	89,71559	29,03853	3,90074	81
54	-0,94926	3,29899	1,03029	3,58412	106,0528	16,70597	3,90607	12
55	2,50768	-0,30758	-0,22564	2,53653	353,0072	-5,10366	3,93099	66
56	2,32906	-1,63389	-0,36857	2,86879	324,9494	-7,38148	3,93535	48
57	2,45415	0,38668	0,21306	2,49354	8,95399	4,9016	3,94472	19
58	2,41305	0,58928	0,3735	2,51188	13,72332	8,55122	3,95723	67
59	-0,92954	3,2615	1,39419	3,66677	105,9078	22,34747	3,96029	62
60	0,35404	2,94149	1,26264	3,22055	83,13682	23,08255	3,98991	40
61	-1,14369	3,52212	0,83308	3,7957	107,9895	12,67846	4,0752	85
62	0,943	2,70863	1,19412	3,10675	70,80461	22,60432	4,07858	9

63	2,41397	-1,51912	-0,83626	2,97226	327,8176	-16,3410	4,08494	82
64	2,50728	-0,63031	-0,99956	2,7718	345,8886	-21,1381	4,09604	22
65	-0,09752	3,24747	1,42479	3,54762	91,72007	23,67941	4,13571	49
66	-0,06101	3,30567	1,19809	3,51662	91,05741	19,9192	4,14287	32
67	1,71422	2,21257	0,89921	2,93983	52,23274	17,81071	4,17361	79
68	2,74694	0,08009	0,15882	2,75269	1,67009	3,30763	4,17752	51
69	2,52137	1,04263	0,32445	2,74766	22,46602	6,78144	4,20525	3
70	0,16779	3,23527	1,43806	3,54446	87,03121	23,93633	4,21888	21
71	0,77462	2,92159	1,44974	3,35223	75,15049	25,62438	4,22315	38
72	2,31716	-2,31201	-0,84512	3,38066	315,0638	-14,4767	4,26801	76
73	1,84263	2,31848	1,05366	3,14338	51,52385	19,58465	4,36352	33
74	2,73451	0,94712	0,36023	2,91622	19,104	7,09559	4,37212	55
75	-0,0143	3,19082	2,22794	3,8917	90,25674	34,9238	4,40672	71
76	2,51673	1,53878	0,64858	3,02033	31,44244	12,40015	4,42454	60
77	2,02423	2,31751	0,78992	3,17684	48,86437	14,39759	4,46009	53
78	3,0787	-0,46554	-0,21869	3,12137	351,4012	-4,01765	4,49263	78
79	2,79169	1,13934	0,7381	3,10426	22,20122	13,75504	4,51704	88
80	2,98249	-1,30618	-0,61643	3,31381	336,3490	-10,7205	4,5291	24
81	2,44338	1,90326	0,62255	3,15913	37,91663	11,36537	4,54009	11
82	2,78134	1,14004	1,04277	3,18165	22,28812	19,13184	4,55009	61
83	2,85253	1,38534	0,35622	3,19107	25,90363	6,40933	4,64399	17
84	0,95617	3,41752	1,21893	3,75226	74,36925	18,95662	4,6693	58
85	2,59905	1,97642	0,73239	3,3463	37,25082	12,64238	4,72005	16
86	1,83354	2,87236	0,98292	3,54661	57,44829	16,08974	4,72326	4
87	3,26939	0,48342	-0,36079	3,32457	8,41092	-6,23005	4,80165	23
88	0,63626	3,8071	1,2051	4,04365	80,51212	17,33887	4,85661	56
89	0,91719	3,49914	1,79691	4,03907	75,31218	26,41579	4,86931	47
90	3,06857	1,48614	0,33936	3,42636	25,84139	5,68405	4,882	100
91	3,18384	1,25088	0,68559	3,48878	21,44905	11,33317	4,91605	57
92	3,20343	1,27888	0,01626	3,44931	21,76304	0,27016	4,93205	92
93	3,31668	0,50368	-1,0144	3,50472	8,63506	-16,8242	4,97779	31
94	2,93692	2,02035	0,4471	3,59266	34,52471	7,14887	5,01193	28
95	2,69407	2,32125	1,25408	3,7708	40,74868	19,42521	5,06365	93
96	2,64614	2,48364	2,03982	4,1631	43,18565	29,33899	5,3268	96
97	2,30931	3,12209	1,51279	4,1676	53,51083	21,28382	5,32887	99
98	3,61791	1,3883	0,41769	3,89758	20,99333	6,15195	5,35449	41
99	0,39453	4,42312	1,68364	4,74914	84,90288	20,76367	5,43065	65
100	3,25682	2,43337	0,56727	4,10487	36,76571	7,94333	5,505	87

## E.9. Archivos con la posición de la sonda

Los datos de los resultados calculados para el caso resuelto en el capítulo 6 se guardan en dos archivos llamados “POSONDA1.res” y “POSONDA2.res” creados por el programa 2, en el primero se guardan los 12 valores obtenidos para cada coordenada rectangular geocéntrica, y se calcula su media, desviación estándar, y desviación estándar de la media de los 12 valores, el contenido de este archivo es el siguiente:

$X_G$ (UA)	$Y_G$ (UA)	$Z_G$ (UA)
-1.38850	-0.50573	0.26145
-1.38759	-0.50532	0.26101
-1.38833	-0.50565	0.26128
-1.38735	-0.50657	0.25981
-1.39043	-0.50432	0.26113
-1.38742	-0.50623	0.26172
-1.38946	-0.50541	0.26099
-1.38789	-0.50451	0.26042
-1.38884	-0.50413	0.26018
-1.38759	-0.50832	0.25752
-1.38909	-0.50524	0.26120
-1.38806	-0.50444	0.26047

Media de X:

-1.38838 UA

Desviación estándar de X:

0.00094 UA

Desviación estándar de la media de X:

0.00027 UA

Media de Y:

-0.50549 UA

Desviación estándar de Y:

0.00118 UA

Desviación estándar de la media de Y:

0.00034 UA

Media de Z:

0.26060 UA

Desviación estándar de Z:

0.00112 UA

Desviación estándar de la media de Z:

0.00032 UA

En el archivo "POSONDA2.res" se da la posición definitiva de la sonda espacial, se da en tres coordenadas distintas como se ve en su contenido que se muestra a continuación:

POSICION CALCULADA DE LA SONDA ESPACIAL

COORDENADAS GEOCENTRICAS RECTANGULARES:

XG (UA): -1.38838  
 YG (UA): -0.50549  
 ZG (UA): 0.26060

COORDENADAS GEOCENTRICAS ESFERICAS:

rG (UA): 1.50034  
 AR (grados): 200.00583 = 13h 20' 1.40''  
 DEC (grados): 10.00255

COORDENADAS HELIOCENTRICAS ESFERICAS:

rH (UA): 2.23186  
 Longitud (grados): 216.60155

Latitud (grados): 11.37452

### E.10. Figuras adicionales del caso del capítulo 6

A continuación se incluyen tres figuras con las posiciones de la sonda, la Tierra, el Sol y los 4 asteroides para el ejemplo resuelto en el capítulo 6 para el día 30 de Mayo de 2005 a las 00.00 horas solares. En la segunda figura, el eje **y** positivo de las coordenadas geocéntricas representadas iría hacia dentro del plano del papel, y en la tercera figura el eje **z** positivo saldría hacia afuera del plano del mismo, en las tres figuras se representan la distancia geocéntrica y heliocéntrica de la sonda espacial. Todas las distancias de la figura están a escala con las dadas en Unidades Astronomicas en el problema, pero las dimensiones de los objetos representados no guarda ninguna relación con la real.

